Anul XLVI **2001**

S T U D I A
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

PHILOSOPHIA

1-2

- DECIDABLE AND UNDECIDABLE -

Editorial Office: Gh. Bilaşcu no. 24, 3400 Cluj-Napoca ♦ Phone: 064-40.53.52

IN MEMORIAM,
K. GÖDEL

SUMAR – CONTENTS – SOMMAIRE

I

II

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

REAL NUMBERS: FROM COMPUTABLE TO RANDOM

CRISTIAN S. CALUDE

Department of Computer Science
University of Auckland
Private Bag 92019, Auckland
New Zealand
E-mail: cristian@cs.auckland.ac.nz

Abstract

A real is computable if it is the limit of a computable, increasing, computably converging sequence of rationals. Omitting the restriction that the sequence converges computably we arrive at the notion of computably enumerable (c.e.) real, that is, the limit of a computable, increasing, converging sequence of rationals. A real is random if its binary expansion is a random sequence (equivalently, if its expansion in base $b \geq 2$ is random). The aim of this paper is to review some recent results on computable, c.e. and random reals. In particular, we will present a complete characterization of the class of c.e. and random reals in terms of halting probabilities of universal Chaitin machines, and we will show that every c.e. and random real is the halting probability of some Solovay machine, that is, a universal Chaitin machine for which ZFC (if sound) cannot determine more than its initial block of 1 bits. A few open problems will be also discussed.

1 Notation and Background

We will use notation that is standard in computability theory and algorithmic information theory; we will assume familiarity with Turing machine computations, computable and computably enumerable (c.e.) sets (see, for example, Soare [48] or Odifreddi [40]) and elementary algorithmic information theory (see, for example, Calude [7]).

By $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ we denote the set of nonnegative integers (natural numbers), rationals and reals, respectively. If f and g are natural number functions, the formula $f(n) \leq g(n) + O(1)$ means that there is a constant $c > 0$ with $f(n) \leq g(n) + c$, for all n.

Let $\Sigma = \{0, 1\}$ denote the binary alphabet. Let Σ^* be the set of (finite) binary strings, and Σ^ω the set of infinite binary sequences. The length of a string x is denoted by $|x|$; λ is the empty string. Let $<$ be the quasi-lexicographical order on Σ^* induced by $0 < 1$, that is, $\lambda < 0 < 1 < 00 < 01 < 10 < 11 < 000 < \cdots$, and let $string_n$ $(n \geq 0)$ be the nth string under this ordering. The concatenation of the strings s and t will be denoted by $s \frown t$. If j is one of 0 or 1, the string of length 1 whose sole component is j will be denoted by $\langle j \rangle$. A string s is a prefix of a string t $(s \subseteq t)$ if $t = s \frown r$, for some $r \in \Sigma^*$. A subset A of Σ^* is *prefix-free* if whenever s and t are in A and $s \subseteq t$, then $s = t$.

For a sequence $\mathbf{x} = x_0 x_1 \cdots x_n \cdots \in \Sigma^\omega$ and an integer number $n \geq 1$, $\mathbf{x}(n)$ denotes the initial segment of length n of $\mathbf{x}$ and x_i denotes the ith digit of $\mathbf{x}$, i.e. $\mathbf{x}(n) = x_0 x_1 \cdots x_{n-1} \in \Sigma^*$. Lower case letters k, l, m, n will denote nonnegative integers, and s, t, x, y, z strings. By $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdots$ we denote infinite sequences from Σ^ω; finally, we reserve $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \Omega$ for reals. Capital letters are used to denote subsets of Σ^*. We fix a standard computable bijective (pairing) function $\langle , \rangle$ defined on $\mathbf{N} \times \Sigma^*$ with values in Σ^*. For a set $A \subseteq \Sigma^*$ let $A_k = \{x \mid \langle k, x \rangle \in A\}$.

Next we move to the probabilistic part. Consider the following experiment: Pick, at random using the Lebesgue measure on $[0, 1]$, a real α in the unit interval and note that the probability that some initial prefix of the binary expansion of α lies in the prefix-free set A is the real number:

$$\Omega_A = \sum_{s \in A} 2^{-|s|}. \tag{1}$$

More formally, for $A \subseteq \Sigma^*$, $A\Sigma^\omega$ denotes the set of sequences having a prefix in A, $\{w\mathbf{x} \mid w \in A,\ \mathbf{x} \in \Sigma^\omega\}$. The sets $A\Sigma^\omega$ are the open sets in the natural topology on Σ^ω. Computably enumerable (c.e.) open sets are sets of the form $A\Sigma^\omega$, where $A \subseteq \Sigma^*$ is c.e. Let μ denote the usual product measure on Σ^ω, given by $\mu(\{w\}\Sigma^\omega) = 2^{-|w|}$, for $w \in \Sigma^*$. For a measurable set $\mathbf{C}$ of infinite sequences, $\mu(\mathbf{C})$ is the probability that $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ when $\mathbf{x}$ is chosen by a random experiment in which an independent toss of a fair coin is used to decide whether $x_n = 1$. If A is prefix-free, then $\mu(A\Sigma^\omega) = \sum_{w \in A} 2^{-|w|} = \Omega_A$.

Following Solovay [49, 50] we say that C is a *Chaitin machine* (self-delimiting Turing machine), shortly, a machine, if C is a Turing machine processing binary strings such that its program set (domain)

$$PROG_C = \{x \in \Sigma^* \mid C(x) \text{ halts}\}$$

is an *instantaneous code*, i.e. a prefix-free set of strings. Sometimes we will write $C(x) < \infty$ when C halts on x and $C(x) = \infty$ in the opposite case. Clearly, $PROG_C$ is c.e.; conversely, every prefix-free c.e. set of strings is the domain of some machine.

The *program-size complexity* of the string $x \in \Sigma^*$ (relatively to C) is $H_C(x) = \min\{|y| \mid y \in \Sigma^*,\ C(y) = x\}$, where $\min \emptyset = \infty$.

Theorem 1 (Invariance Theorem) *We can effectively construct a machine U (called* universal*) such that for every machine C, $H_U(x) \le H_C(x) + O(1)$.*

Note that $PROG_U$ is c.e. but not computable.

The following extension due to Chaitin [21] (see Calude and Grozea [15] for a short proof) of Kraft's inequality is very useful in constructing machines satisfying certain properties:

Theorem 2 (Kraft–Chaitin) *Given a c.e. list of "requirements" $\langle n_i, s_i \rangle$ ($s_i \in \Sigma^*, n_i \in \mathbf{N}, i \ge 0$) such that $\sum_i 2^{-n_i} \le 1$, we can effectively construct a machine C and a computable one-to-one enumeration $x_0, x_1, x_2, \ldots$ of strings x_i of length n_i such that $C(x_i) = s_i$, for all i and $C(x) = \infty$ if $x \notin \{x_i \mid i \in \mathbf{N}\}$.*[1]

2 Computable and Uncomputable Reals

The complexity of real numbers is a central topic in classical computability theory (see Turing [54], Rice [44], Calude [6], Soare [48], Odifreddi [40], Bridges [5]), computable analysis (see Martin-Löf [39], Weihrauch [56], Pour-El and Richards [43], Ko [35], Bridges [4]), algorithmic information theory (see Chaitin [24, 26, 27], Martin-Löf [37], Calude [7]) and information based complexity (see Traub, Wasilkowski, and Woźniakowski [53]).

[1] Notice that $\Omega_C = \sum_i 2^{-n_i}$.

An important class of reals is certainly the set of computable reals. In order to define them we introduce the notions of computable sequence of rationals and computable convergence rate. A sequence (a_i) of rationals a_i is called *computable* if there is a Turing machine which, given a binary name for a nonnegative integer n, computes a name for the rational a_n, with respect to a standard notation of rationals. A sequence (α_i) of reals α_i is said to *converge computably* if it converges and there is a computable function $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ such that $|\alpha_i - \lim_{k\to\infty} \alpha_k| \leq 2^{-j}$, for all i, j with $i \geq g(j)$.

A real α is called *computable* if there exists a computable sequence of rationals which converges computably to α.

Theorem 3 *Let α be a real in the unit interval. Then, the following statements are equivalent:*

1. *The real α is computable.*
2. *There exists a computable sequence (a_n) of rationals with $|\alpha - a_n| \leq 2^{-n}$, for all n.*
3. *There exists a computable function $f : \mathbf{N} \to \{0,1\}$ such that $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)2^{-i}$.*
4. *The set $\{q \in \mathbf{Q} \mid q < \alpha\}$ is computable.*

The equivalences of 1., 2. and 3. and the implication 3. $\Rightarrow$ 4. are uniform, but the implication 4. $\Rightarrow$ 3. is not uniform.

For example, all algebraic numbers, $\log_2 3$, π, the Euler number e are computable; actually, all real numbers commonly used in numerical analysis and natural sciences are computable. Of course, not all real numbers are computable (in fact, *most reals are not computable*).[2]

Given a computable sequence (a_i) of rationals which converges computably to a computable real α, and given a computable function $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ as in the definition above, by computing $a_{g(n)}$ one obtains a rational approximation of α with precision 2^{-n}. By considering an appropriately chosen computable subsequence of the sequence (a_i) one can speed up the convergence to a great extent.

On the other hand there are also computable sequences of rationals which converge to uncomputable reals. These sequences must converge noncomputably, i.e. very slowly. The first example of an uncomputable limit of a computable sequence of rationals has been given by Specker [51].[3]

It is well-known that there are reals which can be approximated by a computable, converging sequence of rationals, but not with a computable convergence rate. For example, if h is an injective, total computable function which enumerates a c.e. set of nonnegative integers which is not computable, then the sum

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-h(k)} \tag{2}$$

[2]It is an open question whether there is any "natural phenomenon" leading to an uncomputable real number.

[3]Such numbers play an important role, for example in the construction of a continuous but uncomputable solution for the wave equation even if the initial conditions are continuous and computable, see Pour-El and Richards [43].

is the limit of the computable sequence of partial sums $(\sum_{k=0}^{n} 2^{-h(k)})_n$, but it is not a computable real (Specker's construction [51]). A very interesting special class of numbers of this form are the Chaitin Ω numbers which will be later introduced and discussed.

We continue with a simple but intriguing example. Let $time_U(string_i)$ be the running time of the computation $U(string_i)$[4], and define the real number

$$\Upsilon_U = \sum_i 2^{-i}/time_U(string_i). \qquad (3)$$

At the first glanced the analogy between (2) and (3) suggests that Υ_U is uncomputable because it is essentially defined in terms of an uncomputable set, $PROG_U$. This intuition is false: *the real* Υ_U *is computable.* Indeed, we can construct an algorithm computing, for every positive integer n, the nth digit of Υ_U. The idea is simple: only the terms $2^{-i}/time_U(string_i)$ for which $time_U(string_i) = \infty$ do produce perturbations in (3) because at every finite step of the computation they appear to be nonzero when, in fact, they are zero! The solution is to run all nonstopping programs $string_i$ enough time such that their cumulative contribution is too small to affect the nth digit of Υ_U.

The following results from Calude and Hertlinger [16] summarize some basic facts about computable, converging sequences of rationals, which may converge computably or noncomputably.

Proposition 4 *Let* $h : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *be an injective, total computable function and define the sequence* (a_n) *of rationals by* $a_n = \sum_{m=0}^{n} 2^{-h(m)}$. *The sequence* $(2^{-h(n)})$ *is a computable sequence of rationals which converges always to zero, and the sequence* (a_n) *is an increasing, computable, converging sequence of rationals.*

Proposition 5 *Let* $h : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *be an injective, total computable function and* $a_n = \sum_{m=0}^{n} 2^{-h(m)}$. *Then, the following conditions are equivalent:*

(a) *The range* $h(\mathbf{N})$ *of* h *is a computable set.*

(b) *The sequence* $(2^{-h(n)})$ *converges computably.*

(c) *The sequence* (a_n) *converges computably.*

(d) *The limit of the sequence* (a_n) *is a computable real.*

We say that a sequence (a_i) of reals with limit α converges *monotonically* if there exists a constant $c > 0$ such that for all i and all $j \geq i$, $c \cdot |\alpha - a_i| \geq |\alpha - a_j|$.

For example, any converging and monotonic, i.e. either nondecreasing (e.g. $a_n = \sum_{m=0}^{n} 2^{-h(m)}$) or nonincreasing sequence of reals converges monotonically: one can take the constant $c = 1$.

Proposition 6 *Every computable sequence of rationals which converges monotonically to a computable real converges computably.*

[4] Note that $time_U(string_i)$ is a positive integer in case $string_i \in PROG_U$, and $time_U(string_i) = \infty$, in the opposite case.

Remark The converse of Proposition 6 is not true as the following example shows. The sequence (a_i) defined by $a_i = 2^{-i}$ if i is even and $a_i = 2^{-2i}$ if i is odd converges computably to zero, but it does not converge monotonically.

Lemma 7 *Let (a_n) be a computable sequence of rationals which converges computably, and let (b_n) be a computable sequence of rationals which converges noncomputably. Then $(a_n + b_n)$ is a computable sequence of rationals which converges noncomputably to the sum of the limits of (a_n) and (b_n).*

Theorem 8 *For every computable real α there is a computable sequence (a_n) of rationals which converges to α, but which does not converge computably.*

Theorem 8 states that we can approximate every computable real noncomputably, that is, very slowly. Thus, *the fact, that a computable sequence of rationals converges noncomputably, does not imply that the limit is uncomputable.* Furthermore we ask whether, given a computable sequence of rationals, one can decide whether its limit is computable or not, and also, whether it converges computably or not. The answer to both these questions is *negative.*

We will use the following notation: a number i is called a *Gödel number* of a computable sequence of rationals (a_n) if $a_n = \nu_{\mathbf{Q}}(\varphi_i(n))$, for all n, where φ is a total standard numbering of the partial computable number functions and $\nu_{\mathbf{Q}}$ is a standard bijection between $\mathbf{N}$ and $\mathbf{Q}$ (see, for example, Weihrauch [56]). We say that it is impossible to decide whether the elements in a certain set A of computable sequences of rationals have a certain property, if there is no algorithm which, given a Gödel number of an element of the set A, decides whether this element has the property or not.

Theorem 9 *It is impossible to decide whether:*

- *a converging, increasing, computable sequence of rationals converges computably,*
- *a converging, increasing, computable sequence of rationals converges to a computable real or to an uncomputable real,*
- *a computable sequence of rationals which converges noncomputably converges to a computable real or to an uncomputable real.*

Theorem 8 and Theorem 9 tell us that a computable sequence of rationals which converges noncomputably may converge to a computable or an uncomputable real, and that it is impossible to decide whether the limit is computable or uncomputable. Is there still a difference between the rate of convergence of a computable sequence of rationals with computable limit and the rate of convergence of a computable sequence of rationals with uncomputable limit? We shall see later that this is indeed the case.

3 Random Reals

In this section we will introduce and study random reals in the unit interval. Reals will be written in binary, so we start by looking at random binary sequences.

> *I am convinced that the vast majority of my readers, and in fact the vast majority of scientists and even nonscientists, are convinced that they know what 'random' is. A toss of a coin is random; so is a mutation, and so is the emission of an alpha particle.... Simple, isn't it?* said Kac in [34].

Well, no! Kac knew very well that randomness could be called many things, but not simple, and in fact his essay shows that randomness is complicated, and it can be described in more than one way, even by mathematicians and scientists. According to B. Efron (cited in Kolata [36])

> *There have been heroic efforts to understand randomness. Randomness is not an easy concept to define.*

Books on probability theory do not even attempt to define it.

> *It's like the concept of a point in geometry books.*

Beltrami [2] remarked:

> *The subject of probability begins by assuming that some mechanism of uncertainty is at work giving rise to what is called randomness, but it is not necessary to distinguish between chance that occurs because of some hidden order that may exist and chance that is the result of blind lawlessness. This mechanism, figuratively speaking, churns out a succession of events, each individually unpredictable, or it conspires to produce an unforeseeable outcome each time a large ensemble of possibilities is sampled.*

In an extreme sense there is no such notion as "true randomness". Indeed, any sequence has some kind of regularity; for example, van der Waerden discovered a "universal" nontrivial property shared by all sequences:

Theorem 10 *In every binary sequence at least one of the two symbols must occur in arithmetical progressions of every length.*

The proof of van der Waerden's result (and of similar ones) is *nonconstructive.* To be more precise, there is no algorithm which will tell in a finite amount of time which alternative is true: 0 occurs in arithmetical progressions of every length or 1 occurs in arithmetical progressions of every length.

A possible approach to define random sequences is to isolate the set of all sequences having "all verifiable" properties that from the point of view of classical probability theory are satisfied with "probability one" with respect to μ.

A property P of sequences $\mathbf{x} \in \Sigma^{\omega}$ is *true almost everywhere in the sense of* μ in case the set of sequences not having the property P is a null set. The main example of such a property, *The Law of Large Numbers*, was discovered by Borel. For every sequence

$\mathbf{x} = x_1x_2 \ldots x_m \ldots \in \{0,1\}^\omega$ and natural number $n \geq 1$ put $S_n(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. *Then, the limit of S_n/n, when $n \to \infty$, exists almost everywhere in the sense of μ and has the value* $1/2$. It is clear that a sequence satisfying a property false almost everywhere with respect to μ is very "particular". Accordingly, it is tempting to try to say that a sequence $\mathbf{x}$ is *"random"* iff it satisfies every property true almost everywhere with respect to μ. Unfortunately, we may define for every sequence $\mathbf{x}$ the property $P_{\mathbf{x}}$ as following: $\mathbf{y}$ *satisfies* $P_{\mathbf{x}}$ *iff for every $n \geq 1$ there exists a natural $m \geq n$ such that* $x_m \neq y_m$. Every $P_{\mathbf{x}}$ is an asymptotic property which is true almost everywhere with respect to μ and $\mathbf{x}$ does not have property $P_{\mathbf{x}}$. Accordingly, *no sequence can verify all properties true almost everywhere with respect to μ.* The above definition is vacuous!

However, there is a way to overcome the above difficulty: We consider not *all* asymptotic properties true almost everywhere with respect to μ, but only a *sequence* of such properties. So, the important question becomes:

What sequences of properties should be considered?

Clearly, the "larger" the chosen sequence of properties is, the "more random" will be the sequences satisfying that sequence of properties. We would like to define a notion of randomness such that at least the following properties are satisfied: *typicality*, that is, regular outcome of a random event is unlikely, and *chaoticity*, i.e. no simple law should be capable to produce a random event.

Martin-Löf [38, 37] defined random sequences by means of statistical tests. A *Martin-Löf test* is a c.e. set $A \subset \Sigma^*$ such that $\mu(A_i\Sigma^\omega) \leq 2^{-i}$, for all natural i. The set $\bigcap_{i\geq 0}(A_i\Sigma^\omega)$ is the set of all sequences which do not pass the randomness test A. With this apparatus we can say that a sequence $\mathbf{x}$ is *Martin-Löf random* if for every Martin-Löf test A, $\mathbf{x} \notin \bigcap_{i\geq 0}(A_i\Sigma^\omega)$.

Martin-Löf [38] proved the existence of a *universal Martin-Löf test,* a test W with the property that for every Martin-Löf test A there is a constant c such that $A_n \subseteq W_{n+c}$, for all n. So, Martin-Löf 's definition can be rephrased as: *A sequence* $\mathbf{x}$ *is Martin-Löf random iff* $\mathbf{x}$ *passes a universal Martin-Löf test.* This result captures "typicality": for each Martin-Löf test A, the set $\bigcap_{i\geq 0}(A_i\Sigma^\omega)$ is constructively null, so

Theorem 11 *Constructively, with probability one (in the sense of μ), every sequence is Martin-Löf-random.*

Hence, from the probabilistic point of view, the set of random sequences is *large.* However, from a topological point of view[5] the situation is completely different (cf. Calude and Chiţescu [12]) as Martin-Löf random sequences form a small set:

Theorem 12 *The set of Martin-Löf random sequences is constructively a first Baire category set.*

[5] As mentioned before, Σ comes equipped with the discrete topology and Σ^ω is endowed with the product topology.

Solovay [49] proposed another measure-theoretic definition of random sequences aiming to capture typicality: a sequence $\mathbf{x}$ is *Solovay random* if for every c.e. set $A \subset \Sigma^*$ such that $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i\Sigma^\omega) < \infty$, there exists a natural N such that for all $i > N$, $\mathbf{x} \notin A_i\Sigma^\omega$.

"Chaoticity" appears in the following two complexity-theoretic definitions (see Chaitin [21]): an infinite sequence $\mathbf{x}$ is *Chaitin–Schnorr random* if there is a constant c such that $H(\mathbf{x}(n)) > n - c$, for every integer $n > 0$, and, apparently the stronger definition, an infinite sequence $\mathbf{x}$ is *Chaitin random* if $\lim_{n\to\infty} H(\mathbf{x}(n)) - n = \infty$.

Finally, we present Hertling and Weihrauch topological approach to define randomness [32]. A *randomness space* is a triple (X, B, μ), where X is a topological space, $B : \mathbf{N} \to 2^X$ is a total numbering of a subbase of the topology of X, and μ is a measure defined on the σ-algebra generated by the topology of X.[6] Let (W_n) be a sequence of open subsets of X; a sequence (V_n) of open subsets of X is called *W-computable* if there is a c.e. set $A \subseteq \mathbf{N}$ such that $V_n = \bigcup_{\pi(n,i)\in A} W_i$ for all $n \in \mathbf{N}$.[7] Next we define $W'_i = W'(i) = \bigcap_{j\in D_{(1+i)}} W_j$, for all $i \in \mathbf{N}$, where $D : \mathbf{N} \to \{E \mid E \subseteq \mathbf{N}$ is finite$\}$ is the computable bijection defined by $D^{-1}(E) = \sum_{i\in E} 2^i$. Note that if B is a numbering of a subbase of a topology, then B' is a numbering of a base of the same topology. A *randomness test on X* is a B' computable sequence (W_n) of open sets with $\mu(W_n) \leq 2^{-n}$, for all $n \in \mathbf{N}$. We say that an element $x \in X$ is called *Hertling–Weihrauch random* if $x \notin \bigcap_{n\in\mathbf{N}} W_n$, for every randomness test (W_n) on X.

Consider now the canonical topology on Σ^ω and the numbering B of a subbase (in fact a base) of the topology is given by $B_i = \{string_i\}\Sigma^\omega$. The general definition applies, so we get: *A sequence is Hertling–Weihrauch random if it is random in the space* (Σ^ω, B, μ).

All the above approaches lead to the same class of sequences:

Theorem 13 *Let $\mathbf{x} \in \Sigma^\omega$. The following statements are equivalent:*

1. *The sequence $\mathbf{x}$ is Martin-Löf random.*
2. *The sequence $\mathbf{x}$ is Chaitin random.*
3. *The sequence $\mathbf{x}$ is Chaitin–Schnorr random.*
4. *The sequence $\mathbf{x}$ is Solovay random.*
5. *The sequence $\mathbf{x}$ is Hertling–Weihrauch random.*

In what follows we will simply call "random" a sequence satisfying one of the above equivalent conditions. Theorem 13 motivates the following "randomness hypothesis" formulated in Calude [8]:

> *A sequence is "algorithmically random" if it satisfies one of the equivalent conditions in Theorem 13.*

[6] Recall that a subbase of a topology is a set β of open sets such that the sets $\bigcap_{W\in E} W$, for finite, nonempty sets $E \subseteq \beta$ form a basis of the topology.

[7] The function $\pi(n, i)$ is a computable bijection, for example, $\pi(n, i) = (n + i)(n + i + 1)/2 + i$.

Various arguments supporting this hypothesis, e.g. *random sequences are Borel absolutely normal*,[8] have been analyzed in the literature, e.g. Calude [7]. Here is recent argument due to Fouché [30]: *if $X \subseteq \Sigma^\omega$ is a measure one Σ_1^0 set, then it contains at least one random sequence.* In particular, if X is Π_1^0 set which contains some random sequence, then it has nonzero measure. So, if a Π_1^0 event is reflected in some random sequence, then the event must be probabilistically significant.

We are now in the position to define random reals in the unit interval: *A real α is random if its binary expansion $\mathbf{x}$ (i.e. $\alpha = 0.\mathbf{x}$) is random.* The choice of the binary base does not play any role, cf. Calude and Jürgensen [18], Hertling and Weihrauch [32], Staiger [52]: *randomness is a property of reals not of names of reals.*

Let us make a short digression concerning the above result. Note first that normality is not base invariant; even the weaker property of disjunctivity (a sequence is disjunctive in case any string appears in the sequence) is not base invariant (cf. Hertling [31]). Following von Mises [55] consider an arbitrary sequence $\mathbf{x} = x_1x_2 \ldots x_n \ldots$ over the alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ and define a new sequence $\mathbf{y} = y_1y_2 \cdots y_n \ldots$, over the alphabet $\Gamma = \{0, 1, 2\}$, by

$$y_1 = x_1, y_n = x_{n-1} + x_n, n \geq 2.$$

Then, $\mathbf{y}$ *is not random*, even if $\mathbf{x}$ is a random sequence. The motivation is simple: the strings 02 and 20 never appear in $\mathbf{y}$. (Actually, there are many other strings which do not appear in $\mathbf{y}$.)

A seemingly minor change in the above example makes a major change. For $\mathbf{x} = x_1x_2 \cdots$ with $x_1, x_2, \ldots \in \{0, 1\}$ define $\mathbf{y} = y_1y_2 \cdots$ with $y_1, y_2, \ldots \in \{0, 1\}$ by

$$y_i = \begin{cases} x_1, & \text{if } i = 1, \\ x_{i-1} \oplus x_i, & \text{if } i > 1. \end{cases}$$

It is not difficult to prove that $\mathbf{y}$ is random provided $\mathbf{x}$ is random.

It is immediate that no random real is computable.[9] Theorem 10 shows that every (random) sequence has some kind of regularity. Is this phenomenon symmetric, i.e. *is there any trace of computability in random reals?*

4 C.E. Reals

Following Soare [47], a real α is called *c.e.* if there is a computable, increasing sequence of rationals which converges (*not necessarily computably*) to α. We will start with several characterizations of c.e. reals (cf. Calude, Hertling, Khoussainov, Wang [17]).

Recall that if $A \subseteq \Sigma^*$ is prefix-free, then, due to Kraft's inequality, the real number $\Omega_A = \sum_{x \in A} 2^{-|x|}$ lies in the interval $[0, 1]$. For a set $X \subseteq \mathbf{N}$ we define the number

$$2^{-X-1} = \sum_{n \in X} 2^{-n-1}.$$

[8] Every string appears in a random sequence with the probability 2^{-n}, where n is the length of the string.

[9] Bailey and Crandall [1] discussed a hypothesis which implies the normality of many natural real numbers, e.g. π, e. A different approach was discussed in Pincus and Singer [42] and Pincus and Kalman [41]; see also Casti [20] and Beltrami [2].

This number also lies in the interval $[0, 1]$. If we disregard all finite sets X, which lead to rational numbers 2^{-X-1}, we get a bijection $X \mapsto 2^{-X-1}$ between the class of infinite subsets of $\mathbf{N}$ and the real numbers in the interval $(0, 1]$. If $0.\mathbf{y}$ is the binary expansion of a real α with infinitely many ones, then $\alpha = 2^{-X_\alpha-1}$ where $X_\alpha = \{i \mid y_i = 1\}$. Clearly, if X_α is c.e., then the number $2^{-X_\alpha-1}$ is c.e., but the converse is not true as the Chaitin Ω numbers show.[10] We characterize c.e. reals α in terms of prefix-free c.e. sets of strings and in terms of the sets X_α.

Theorem 14 *Let α be a real in $(0, 1]$. The following conditions are equivalent:*

1. *The number α is c.e.*
2. *There is a computable, nondecreasing sequence of rationals (a_n) which converges to α.*
3. *The set $\{p \in \mathbf{Q} \mid p < \alpha\}$ of rationals less than α is c.e.*
4. *There is an infinite prefix-free c.e. set $A \subseteq \Sigma^*$ with $\alpha = \Omega_A$.*
5. *There is an infinite prefix-free computable set $A \subseteq \Sigma^*$ with $\alpha = \Omega_A$.*
6. *There is a total computable function $f : \mathbf{N}^2 \to \{0, 1\}$ such that*
   (a) *If for some k, n we have $f(k, n) = 1$ and $f(k, n+1) = 0$ then there is an $l < k$ with $f(l, n) = 0$ and $f(l, n + 1) = 1$.*
   (b) *We have: $k \in X_\alpha \iff \lim_{n\to\infty} f(k, n) = 1$.*

Note the importance of the type of representation used to define c.e. reals, especially compare conditions 3. in Theorem 3 and Theorem 14, and conditions 4. and 5. in Theorem 14. Note also that according to condition 6. in Theorem 14, in the process of approximation of α the nth bit may oscillate from 0 to 1 and 1 to 0 but no more than 2^n times. In this respect, Downey and LaForte [28] proved the following interesting result:

Theorem 15 *There exists an uncomputable c.e. real α such that every prefix-free set A such that $\alpha = \Omega_A$ is computable.*

5 C.E. and Random Reals

We are now ready to answer in the affirmative, following Chaitin [21], the question posed at the end of Section 3.

Theorem 16 *If U is universal machine, then Ω_U is random.*

If C is a machine, then Ω_C represents its halting probability. When $C = U$, a universal machine, then its halting probability Ω_U is called a *Chaitin Ω real*, shortly, *Ω real.*

[10] See Theorem 16.

6 Approximating C.E. Reals

In order to compare the information contents of c.e. reals, Solovay [49] has introduced the domination relation. The real α is said to *dominate* the real β if there are a partial computable function $f : \mathbf{Q} \overset{o}{\to} \mathbf{Q}$ and a constant $c > 0$ with the property that if p is a rational number less than α, then $f(p)$ is (defined and) less than β, and it satisfies the inequality

$$c(\alpha - p) \geq \beta - f(p).$$

In this case we write $\alpha \geq_{dom} \beta$ or $\beta \leq_{dom} \alpha$.

Roughly speaking, a real α dominates a real β if from any good approximation to α from below (say, from a rational number $p < \alpha$ with $\alpha - p < 2^{-n}$) one can effectively obtain a good approximation to β from below (a rational number $f(p) < \beta$ with $\beta - f(p) < 2^{-n+\text{constant}}$). For c.e. reals this can also be expressed as follows.

Lemma 17 *A c.e. real α dominates a c.e. real β iff there are computable, increasing (or nondecreasing) sequences (a_i) and (b_i) of rationals and a constant c with $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, and $c(\alpha - a_n) \geq \beta - b_n$, for all n.*

Lemma 18 *Let α, β and γ be c.e. reals. Then the following conditions hold:*

1. *The relation $\geq_{dom}$ is reflexive and transitive.*
2. *For every α, β one has $\alpha + \beta \geq_{dom} \alpha$.*
3. *If $\gamma \geq_{dom} \alpha$ and $\gamma \geq_{dom} \beta$, then $\gamma \geq_{dom} \alpha + \beta$.*
4. *For every nonnegative α and positive β one has $\alpha \cdot \beta \geq_{dom} \alpha$.*
5. *If α and β are nonnegative, and $\gamma \geq_{dom} \alpha$ and $\gamma \geq_{dom} \beta$, then $\gamma \geq_{dom} \alpha \cdot \beta$.*

Remark Every random real α can be written as

$$\alpha = \alpha' + \alpha'', \tag{4}$$

where α', α'' are nonrandom. Furthermore, $\alpha' \cdot \alpha''$ is random.

Open Question: Can we take $\alpha, \alpha', \alpha''$ c.e.?

The following result states that no computable sequence (a_i) of rationals which converges to a computable real can dominate a computable sequence of rationals converging to an uncomputable real. Hence, although we can have slow computable approximation of computable reals, we cannot slow it down arbitrarily.

Theorem 19 *Let (a_n) be a computable sequence of rationals converging to a computable real α, and let (b_n) be a computable sequence of rationals converging to an uncomputable real β. Then, for every $c > 0$ there are infinitely many i such that*

$$|\beta - b_i| > c \cdot |\alpha - a_i|.$$

Lemma 20 *For every* $c \in \mathbf{N}$ *there is a positive integer* N_c *such that for every* $n \in \mathbf{N}$ *and all strings* $x, y \in \Sigma^n$ *with* $|0.x - 0.y| \leq c \cdot 2^{-n}$ *we have*

$$|H(y) - H(x)| \leq N_c.$$

Up to now we have considered arbitrary converging and computable sequences (a_i) and (b_i) and have explicitly formulated two gaps with respect to the convergence rates, one from computable to uncomputable reals, and one from nonrandom to random reals. Both results were based on the inequality $|\beta - b_i| > c \cdot |\alpha - a_i|$ holding for infinitely many i. While we had some doubts whether in this case one can really claim that (b_i) converges slower than (a_i), we shall see now that these doubts can be cast aside if we compare only monotonically converging sequences with computable limit and monotonically converging sequences with random limit: then we can replace the quantifier "for infinitely many i" by the quantifier "for almost all i". Certainly in this case it is justified to say that (b_i) converges slower than (a_i).

Lemma 21 *Let* (b_i) *be a computable sequence of rationals which converges to a random real* β. *Then for every* $d > 0$ *and almost all* i *we have*

$$|\beta - b_i| > 2^{d-i}.$$

The next result was proved in Calude and Hertling [16].

Scholium 22 *Let* (a_i) *be a computable sequence of rationals which converges computably to a computable real* α, *and let* (b_i) *be a computable sequence of rationals which converges monotonically to a random real* β. *Then for every* $c > 0$ *there exists a* $d > 0$ *such that for all* $i \geq d$

$$|\beta - b_i| > c \cdot |\alpha - a_i|. \tag{5}$$

Corollary 23 *Let* (a_i) *be a computable sequence of rationals which converges monotonically to a computable real* α, *and let* (b_i) *be a computable sequence of rationals which converges monotonically to a random real* β. *Then for every* $c > 0$ *there exists a* $d > 0$ *such that for all* $i \geq d$

$$|\beta - b_i| > c \cdot |\alpha - a_i|. \tag{6}$$

We conclude this section with a result by Solovay [49] on the relationship between the domination relation and the program-size complexity.

Theorem 24 *Let* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma^\omega$ *be two infinite binary sequences such that both* $0.\mathbf{x}$ *and* $0.\mathbf{y}$ *are c.e. reals and* $0.\mathbf{x} \geq_{dom} 0.\mathbf{y}$. *Then*

$$H(\mathbf{y}(n)) \leq H(\mathbf{x}(n)) + O(1).$$

The converse implication in Theorem 24 is false (see Solovay [49], Calude and Coles [13]). A stronger version was proved in Calude and Coles [14]:

Theorem 25 *There is an uncomputable c.e. real* $0.\mathbf{x}$ *such that* $H(\mathbf{x}_n) \leq H(string_n) + O(1)$.

7 A Characterization of C.E. Random Reals

This section is devoted to a first characterization of c.e. random reals.

7.1 More About Domination

We consider now a relation between c.e. sets which is very close, but not equivalent, to the domination relation. Let A, B be infinite, prefix-free c.e. sets. Following Calude, Hertling, Khoussainov, Wang [17], we say that the set A *strongly simulates* the set B (write $B \leq_{ss} A$) if there is a partial computable function $f : \Sigma^* \stackrel{o}{\to} \Sigma^*$ which satisfies the following three conditions: 1) $A = dom(f)$, 2) $B = f(A)$, 3) $|x| \leq |f(x)| + O(1)$, for all $x \in A$. Note that $\leq_{ss}$ is reflexive and transitive.

Lemma 26 *If A, B are infinite prefix-free c.e. sets and $B \leq_{ss} A$, then $\Omega_B \leq_{dom} \Omega_A$.*

The following partial converse of Lemma 26 ([17]) is very important.[11]

Theorem 27 *Let α be a c.e. real, and B be an infinite prefix-free c.e. set. If $\Omega_B \leq_{dom} \alpha$, then there is an infinite prefix-free c.e. set $A \subset \Sigma^*$ such that $\alpha = \Omega_A$ and $B \leq_{ss} A$.*

Remark Recently Downey, Hirschfeldt and Nies [29] have obtained the following algebraic characterization of domination:

$\alpha \leq_{dom} \beta$ *iff there exist an integer $c > 0$ and a c.e. real γ such that $\beta = \gamma + \frac{\alpha}{c}$.*

7.2 Ω Reals Are Ω-Like

Following Solovay [49] we say that a computable increasing, and converging sequence (a_i) of rationals is *universal* if for every computable, increasing and converging sequence (b_i) of rationals there exists a number $c > 0$ such that $c(\alpha - a_n) \geq \beta - b_n$, for all n, where $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ and $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$. Solovay called a real *Ω-like* if it is the limit of a universal computable, increasing sequence of rationals.

In Calude, Hertling, Khoussainov, Wang [17] one proves the following:

Theorem 28 *Let U be a universal machine. Every computable, increasing sequence of rationals converging to Ω_U is universal.*

7.3 Ω-like Reals Are Ω Reals

First we note that

Lemma 29 *Any Ω-like real dominates every c.e. real.*

The next theorem was proved in Calude, Hertling, Khoussainov, Wang [17].

[11] In [17] one proves the existence of two infinite prefix-free c.e. sets A and B such that $\mu(A\Sigma^\omega) = \mu(B\Sigma^\omega) = 1$ but $A \not\leq_{ss} B$ and $B \not\leq_{ss} A$.

Theorem 30 *Every Ω-like real α is an Ω real, i.e. there exists a universal machine U such that $\alpha = \Omega_U$.*

In view of Lemma 29 and Theorem 30 we get:[12]

Theorem 31 *Let α be a c.e. real. The following statements are equivalent:*

1. *There exists a universal computable, increasing sequence of rationals converging to α.*
2. *Every computable, increasing sequence of rationals with limit α is universal.*
3. *The real α dominates every c.e. real.*

7.4 Every C.E. Random Real Is Ω-like

Theorem 13 can be rephrased directly for reals as follows: *A real α is random iff for every Martin-Löf test A, $\alpha \notin \bigcap_{i \geq 0} A_i$.* In the context of reals, a Martin-Löf test A is a uniformly c.e. sequence of c.e. open sets (A_n) of the space Σ^ω such that $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$. The following two important results were proved by Slaman [45, 46].

Lemma 32 *Let $(a_n), (b_n)$ be two computable, increasing sequences of rationals converging to α and β, respectively. One of the following two conditions hold:*

A) *There is a Martin-Löf test A such that $\alpha \in \bigcap_{i \geq 0} A_i$.*

B) *There is a rational constant $c > 0$ such that $c(\alpha - a_i) \geq \beta - b_i$, for all i.*

Theorem 33 *Every c.e. random real is Ω-like.*

The following theorem summarizes the characterization of c.e. and random reals:

Theorem 34 *Let $\alpha \in (0, 1)$. The following conditions are equivalent:*

1. *The real α is c.e. and random.*
2. *For some universal machine U, $\alpha = \Omega_U$.*
3. *The real α is Ω-like.*
4. *Every computable, increasing sequence of rationals with limit α is universal.*

In [46] Slaman proved the following result answering an open problem in [17]:

Theorem 35 *The measure of any section A_n of a universal Martin-Löf test A, $\mu(A_n\Sigma^\omega)$, is Ω-like, hence c.e. and random.*

[12] The equivalence of the statements 1 and 3 comes from Chaitin [22].

8 Properties of C.E. Random Reals

C.e. random reals are dense in the unit interval. They have many other interesting properties.

Proposition 36 *The sum of a random c.e. real and a c.e. real is a random c.e. real. The product of a positive random r.e real with a positive c.e. real is a random c.e. real.*

Corollary 37 *The class of random c.e. reals is closed under addition. The class of positive random c.e. reals is closed under multiplication.*

The last Corollary contrasts with the fact that addition and multiplication do not preserve randomness. For example, if α is a random number, then $1-\alpha$ is random as well, but $\alpha+(1-\alpha)=1$ is not random.

For two reals α and β, $\alpha =_{dom} \beta$ denotes the conjunction $\alpha \geq_{dom} \beta$ and $\beta \geq_{dom} \alpha$. For a real α, let $[\alpha] = \{\beta \in \mathbf{R} \mid \alpha =_{dom} \beta\}$; $\mathbf{R}_{r.e.} = \{[\alpha] \mid \alpha \text{ is an c.e. real}\}$.

Theorem 38 *The structure $\langle \mathbf{R}_{r.e.}; \leq_{dom}\rangle$ is an upper semilattice. It has a least element which is the $=_{dom}$-equivalence class containing exactly all computable real numbers.*

Theorem 34 proves that $\langle \mathbf{R}_{r.e.}; \leq_{dom}\rangle$ also has a greatest element, which is the equivalence class containing exactly all Chaitin Ω numbers.

Theorem 39 *Given the first n bits of Ω_U one can decide whether $U(x)$ halts or not on an arbitrary program x of length at most n.*

Remark The first 10,000 bits of Ω_U include a tremendous amount of mathematical knowledge. In Bennett's words [3]:

> *[Ω] embodies an enormous amount of wisdom in a very small space ... inasmuch as its first few thousands digits, which could be written on a small piece of paper, contain the answers to more mathematical questions than could be written down in the entire universe.*
>
> *Throughout history mystics and philosophers have sought a compact key to universal wisdom, a finite formula or text which, when known and understood, would provide the answer to every question. The use of the Bible, the Koran and the I Ching for divination and the tradition of the secret books of Hermes Trismegistus, and the medieval Jewish Cabala exemplify this belief or hope. Such sources of universal wisdom are traditionally protected from casual use by being hard to find, hard to understand when found, and dangerous to use, tending to answer more questions and deeper ones than the searcher wishes to ask. The esoteric book is, like God, simple yet undescribable. It is omniscient, and transforms all who know it ... Omega is in many senses a cabalistic number. It can be known of, but not known, through human reason. To know it in detail, one would have to accept its uncomputable digit sequence on faith, like words of a sacred text.*

It is worth noting that even if we get, by some kind of miracle, the first 10,000 digits of Ω_U, the task of solving the problems whose answers are embodied in these bits is computable but unrealistically difficult: the time it takes to find all halting programs of length less than n from $0.\Omega_0\Omega_2 \ldots \Omega_{n-1}$ grows faster than any computable function of n.

We finish this section with a proof showing that c.e. random reals are wtt-complete, but not tt-complete (cf. Calude and Nies [19]). We need some more notation. For a set $A \subset \Sigma^*$ we denote by χ_A the characteristic function of A. Denote by W_x the domain of φ_x, where (φ_x) is a Gödel numbering of all partial computable string functions. We say that A is *Turing reducible* to B, and we write $A \leq_T B$, if there is an oracle Turing machine φ_w^B such that $\varphi_w^B(x) = \chi_A(x)$. We say that A is *weak truth-table reducible* to B, and we write $A \leq_{wtt} B$, if $A \leq_T B$ via a Turing reduction which on input x only queries strings of length less than $g(x)$, where $g : \Sigma^* \to \mathbf{N}$ is a fixed computable function. We say that A is *truth-table reducible* to B, and we write $A \leq_{tt} B$, if there is a computable sequence of Boolean functions $\{F_x\}_{x\in\Sigma^*}$, $F_x : \Sigma^{r_x+1} \to \Sigma$, such that for all x, we have $\chi_A(x) = F_x(\chi_B(0)\chi_B(1)\cdots\chi_B(r_x))$.[13] Let $K = \{x \in \Sigma^* \mid \varphi_x(x) < \infty\}$; a c.e. set A is *tt(wtt)-complete* if $K \leq_{tt} A$ ($K \leq_{wtt} A$). See Soare [48] or Odifreddi [40] for more details.

Theorem 40 *The set* $\mathcal{H} = \{(x,n) \mid x \in \Sigma^*, n \in \mathbf{N},\ H(x) \leq n\}$ *is wtt-complete.*

Theorem 41 *The set* $\mathcal{H}$ *is wtt-reducible to* Ω_U.

The following result belongs to Juedes, Lathrop, and Lutz [33] (we follow the direct proof in Calude and Nies [19]).

Theorem 42 *If* $K \leq_{tt} \mathbf{x}$*, then* $\mathbf{x}$ *is not random.*

9 Solovay Machines and Incompleteness

According to Theorem 34, c.e. random reals can be coded by universal machines through their halting probabilities. How "good" or "bad" are these names? In [21] (see also [22, 26]), Chaitin proved the following:

Theorem 43 *Assume that* ZFC[14] *is arithmetically sound.*[15] *Then, for every universal machine* U*,* ZFC *can determine the value of only finitely many bits of* Ω_U.

In fact one can give a bound on the number of bits of Ω_U which ZFC can determine; this bound can be explicitly formulated, but it *is not effective*, in the sense that it's not computable. For example, in [26] Chaitin described, in a dialect of Lisp, a universal machine U and a theory T, and proved that U can determine the value of at most $H(T) + 15,328$ bits of Ω_U; $H(T)$ is the program-size complexity of the theory T, an

[13] Note that in contrast with tt-reductions, a wtt-reduction may diverge.

[14] Zermelo set theory with choice.

[15] That is, any theorem of arithmetic proved by ZFC is *true*.

uncomputable number.

Fix a universal machine U and consider all statements of the form

$$\text{“The } n^{th} \text{ binary digit of the expansion of } \Omega_U \text{ is } k\text{”}, \tag{7}$$

for all $n \geq 0, k = 0, 1$. How many theorems of the form (7) can ZFC prove? More precisely, is there a bound on the set of non-negative integers n such that ZFC proves a theorem of the form (7)? From Theorem 43 we deduce that ZFC can prove only finitely many (true) statements of the form (7). This is Chaitin strongest information-theoretic version of Gödel's incompleteness (see [26, 27]):

Theorem 44 *If ZFC is arithmetically sound and U is a universal machine, then almost all true statements of the form (7) are unprovable in ZFC.*

Again, a bound can be explicitly found, but not effectively computed.

Of course, for every c.e. random real α we can construct a universal machine U such that $\alpha = \Omega_U$ and ZFC is able to determine finitely (but as many as we want) bits of Ω_U. By tuning the construction of the universal machine, Solovay [50] went into the opposite direction and obtained a dramatic improvement of Theorem 43:

Theorem 45 *We can effectively construct a universal machine U such that ZFC, if arithmetically sound, cannot determine any single bit of Ω_U.*

Solovay [50] proved a sharper version of Theorem 45 by replacing ZFC with a computably axiomatizable 1-consistent theory. Theorem 43 holds true for any universal machine U (it's easy to see that the finite set of (true) statements of the form (7) which can be proven in ZFC can be arbitrarily large) while Theorem 45 constructs a specific U.

A machine U for which PA[16] can prove its universality and ZFC cannot determine more than the initial block of 1 bits of the binary expansion of its halting probability, Ω_U, will be called *Solovay machine.*[17] In view of Theorem 34 and Theorem 45, we may ask the question: *Which c.e. random reals are halting probabilities of Solovay machines?* Following Calude [10] we prove:

Theorem 46 *Assume that ZFC is arithmetically sound. Then, every c.e. random real is the halting probability of a Solovay machine.*

For example, if $\alpha \in (3/4, 7/8)$ is c.e. and random, then in the worst case ZFC can determine its first two bits (11), but no more.

Corollary 47 *Assume that ZFC is arithmetically sound. Then, every c.e. random real $\alpha \in (0, 1/2)$ is the halting probability of a Solovay machine which cannot determine any single bit of α. No c.e. random real $\alpha \in (1/2, 1)$ has the above property.*

[16] PA means Peano Arithmetic.

[17] Of course, U depends on ZFC.

Gödel Incompleteness Theorem is constructive, but the proof of Theorem 44 appears to be non-constructive. Is it possible to get a constructive variant of Theorem 44? The answer is affirmative and here is a possible variant:

Theorem 48 *If ZFC is arithmetically sound and U is a Solovay machine, then the statement "the 0^{th} bit of the binary expansion of Ω_U is 0" is true but unprovable in ZFC.*

In fact, one can effectively construct arbitrarily many examples of true and unprovable statements of the form (7), where U is a Solovay machine.

Consider a partial computable function ψ (depending upon two variables, a non-negative integer and a string) such that:

- for every non-negative integer n, the partial function $\psi_n(s) = \psi(n, s)$ is a machine, and
- for every φ_n with a prefix-free domain we have $\psi_n(s) = \varphi_n(s)$, for all non-negative integers n and all strings s.

Denote by D_n the domain of ψ_n and put $\Omega_n = \Omega_{D_n}$. The time relativized versions of D_n and Ω_n are defined in the usual way. Let $D_n[t]$ be the set of all elements of D_n which have appeared by time t and let $\Omega_n[t] = \Omega_{D_n[t]}$, the approximation of Ω_n computable at time t. The following facts follow directly:

1. Given n and t we can effectively compute the finite set $D_n[t]$ and the rational number $\Omega_n[t]$.
2. The sequence $(\Omega_n[t])$ increases monotonically to Ω_n.

Proposition 49 *Let U be a universal machine, $\Omega_U = 0.\omega_0\omega_1 \ldots$, and let $s = s_0 s_1 \ldots s_m$ be a binary string. Then, we can effectively construct a universal machine W such that $\Omega_W = 0.s_0 s_1 \ldots s_m \omega_0 \omega_1 \ldots$.*

9.1 C.E. Random Reals Are Halting Probabilities of Solovay Machines

We fix an interpretation of Peano Arithmetic (PA) in ZFC. Each sentence of the language of PA has a translation into a sentence of the language of ZFC, determined by the interpretation of PA in ZFC. A "sentence of arithmetic" indicates a sentence of the language of ZFC that is the translation of some sentence of PA. We shall assume that ZFC is *arithmetically sound*, that is, any sentence of arithmetic which is a theorem of ZFC is true (in the standard model of PA).[18]

A *dyadic rational* is a rational number of the form $r/2^s$, where r and s are integers and $s \geq 0$; for example, $\Omega_n[t]$ is a dyadic rational. If x is a real number which is not a dyadic rational, then x has a unique binary expansion. We start numbering the digits of the binary expansion of a real α with the 0^{th} digit: $\alpha = 0.\alpha_0\alpha_1 \ldots$

Every statement of the form

$$\text{"The } n^{th} \text{ binary digit of the expansion of } \Omega_l \text{ is } k\text{"}, \tag{8}$$

[18] The metatheory is ZFC itself, that is, "we know" that PA itself is arithmetically sound.

for all $n, l \geq 0, k = 0, 1$, can easily be formalized in PA. Moreover, if ψ_l is a machine which PA can prove universal and ZFC proves the assertion (8), then this assertion *is true.*

Theorem 50 *Assume ZFC is arithmetically sound. Let $i \geq 0$ and consider the c.e. random real*

$$\alpha = 0.\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_{i+1} \dots, \text{ where } \alpha_0 = \alpha_1 = \dots \alpha_{i-1} = 1, \alpha_i = 0.$$

Then, we can effectively construct a universal machine, U (depending upon ZFC and α), such that the following three conditions are satisfied:

a) PA proves the universality of U.

b) ZFC can determine at most i initial bits of Ω_U.

c) $\alpha = \Omega_U$.

If we set $i = 0$ in Theorem 50, then we get Corollary 47. Indeed, every c.e. random real in the interval $(0, 1/2)$ has its 0^{th} digit 0, so it can be represented as the halting probability of a Solovay machine for which ZFC cannot determine any single bit. However, if α is c.e. and random, but $\alpha > 1/2$, then ZFC can determine the 0^{th} bit of α which is 1.

9.2 Information-Theoretic Incompleteness

Theorem 48 follows directly from Corollary 47. Indeed, start with a universal machine U and effectively construct a Solovay machine U' such that $\Omega_{U'} = \frac{1}{2} \cdot \Omega_U$. Then, $\Omega_{U'}$ is less than $1/2$, so its 0^{th} bit is 0, but ZFC *cannot prove* this fact!

We can now use Chaitin's Theorem [23]

Theorem 51 *Given a universal Chaitin machine U one can effectively construct an exponential Diophantine equation $P(n, x, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$ such that for every natural fixed k the equation $P(k, x, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$ has an infinity of solutions iff the kth bit of Ω_U is 1.*

to effectively construct an exponential Diophantine equation which has only finitely many solutions, but this fact cannot be proven in ZFC.

In fact, for every binary string $s = s_1 s_2 \dots s_n$ use Proposition 49 to effectively construct a Solovay machine U such that the binary expansion of Ω_U has the string $\langle 0 \rangle \frown s_1 s_2 \dots s_n$ as prefix. Consequently, *the following statements*

"The 0^{th} binary digit of the expansion of Ω_U is 0",

"The 1^{th} binary digit of the expansion of Ω_U is s_1",

"The 2^{th} binary digit of the expansion of Ω_U is s_2",

$$\vdots$$

"The $(n+1)^{th}$ binary digit of the expansion of Ω_U is s_n",

are true but unprovable in ZFC.

References

[1] D. H. Bailey, R. C. Crandall. On the Random Character of Fundamental Constant expansions, `http://www.perfsci.com`, May 2000.

[2] E. Beltrami. *What is Random? Chance and Order in Mathematics and Life*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[3] C. H. Bennett, M. Gardner. The random number omega bids fair to hold the mysteries of the universe, *Scientific American* **241** (1979) 20–34.

[4] D. S. Bridges. A constructive look at the real number line, in P. Ehrlich (ed.). *Synthèse: Real Numbers, Generalizations of the Reals and Theories of Continua*, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1994, 29–92.

[5] D. S. Bridges. *Computability—A Mathematical Sketchbook*, Springer Verlag, Berlin, 1994.

[6] C. Calude. *Theories of Computational Complexity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[7] C. S. Calude. *Information and Randomness. An Algorithmic Perspective*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[8] C. S. Calude. A glimpse into algorithmic information theory, in P. Blackburn, N. Braisby, L. Cavedon, A. Shimojima (eds.). *Logic, Language and Computation*, Volume 3, CSLI Series, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, 65–81.

[9] C. S. Calude. A characterization of c.e. random reals, *Theoret. Comput. Sci.*, to appear.

[10] C. S. Calude, Chaitin Ω numbers, Solovay machines and incompleteness, *Theoret. Comput. Sci.*, accepted.

[11] C. S. Calude, G. J. Chaitin. Randomness everywhere, *Nature*, 400 22 July (1999), 319–320.

[12] C. Calude, I. Chiţescu. Random sequences: some topological and measure-theoretical properties, *An. Univ. Bucureşti, Mat.-Inf.* 2 (1988), 27–32.

[13] C. S. Calude, R. J. Coles. On a Theorem of Solovay, *CDMTCS Research Report* 094, 1999, 14 pp.

[14] C. S. Calude, R. J. Coles. Program-size complexity of initial segments and domination relation reducibility, in J. Karhumäki, H. A. Maurer, G. Păun, G. Rozenberg (eds.). *Jewels Are Forever*, Springer-Verlag, Berlin, 1999, 225–237.

[15] C. Calude and C. Grozea. Kraft-Chaitin inequality revisited, *J. Univ. Comput. Sci.* 5 (1996), 306–310.

[16] C. S. Calude, P. Hertling. Computable approximations of reals: An information-theoretic analysis, *Fundamenta Informaticae* 33 (1998), 1-16.

[17] C. S. Calude, P. Hertling, B. Khoussainov, and Y. Wang. Recursively enumerable reals and Chaitin Ω numbers, in: M. Morvan, C. Meinel, D. Krob (eds.), *Proceedings of the 15th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (Paris)*, Springer–Verlag, Berlin, 1998, 596–606. Full paper to appear in *Theoret. Comput. Sci.*

[18] C. Calude, H. Jürgensen. Randomness as an invariant for number representations, in H. Maurer, J. Karhumäki, G. Rozenberg (eds.). *Results and Trends in Theoretical Computer Science*, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 44-66.

[19] C. Calude, A. Nies. Chaitin Ω numbers and strong reducibilities, *J. Univ. Comput. Sci.* 3 (1997), 1161–1166.

[20] J. L. Casti. Truly, madly, randomly, *New Scientist* 23 Aug (1997),32–35.

[21] G. J. Chaitin. A theory of program size formally identical to information theory, *J. Assoc. Comput. Mach.* 22 (1975), 329–340. (Reprinted in: [24], 113–128)

[22] G. J. Chaitin. Algorithmic information theory, *IBM J. Res. Develop.* 21 (1977), 350–359, 496. (Reprinted in: [24], 44–58)

[23] G. J. Chaitin. *Algorithmic Information Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987. (third printing 1990)

[24] G. J. Chaitin. *Information, Randomness and Incompleteness, Papers on Algorithmic Information Theory*, World Scientific, Singapore, 1987. (2nd ed., 1990)

[25] G. J. Chaitin. On the number of N-bit strings with maximum complexity, *Applied Mathematics and Computation* 59(1993), 97-100.

[26] G. J. Chaitin. *The Limits of Mathematics*, Springer-Verlag, Singapore, 1997.

[27] G. J. Chaitin. *The Unknowable*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.

[28] R. G. Downey, G. L. LaForte. Presentations of Computably Enumerable Reals, *CDMTCS Research Report* 135, 2000, 23pp.

[29] R. G. Downey. Email to C. S. Calude, 6 June 2000.

[30] W. L. Fouché. Descriptive complexity and reflective properties of combinatorial configurations, *J. London. Math. Soc.* 54 (1996), 199-208.

[31] P. Hertling. Disjunctive ω-words and real numbers, *J. UCS* 2 (1996), 549-568.

[32] P. Hertling, K. Weihrauch. Randomness spaces, in K. G. Larsen, S. Skyum, and G. Winskel (eds.). *Automata, Languages and Programming, Proceedings of the 25th International Colloquium, ICALP'98* (Aalborg, Denmark), Springer-Verlag, Berlin, 1998, 796–807.

[33] D. Juedes, J. Lathrop, J. Lutz. Computational depth and reducibility, *Theoret. Comput. Sci.* 132 (1994), 37-70.

[34] M. Kac. What is random? *American Scientist* 71 (1983), 405-406.

[35] Ker-I, Ko. *Complexity of Real Functions*, Birkhauser, Berlin, 1991.

[36] G. Kolata. What does it mean to be random? *Science* 7 (1986), 1068.

[37] P. Martin-Löf. *Algorithms and Random Sequences*, Erlangen University, Nürnberg, Erlangen, 1966.

[38] P. Martin-Löf. The definition of random sequences, *Inform. and Control* 9 (1966), 602–619.

[39] P. Martin-Löf. *Notes on Constructive Mathematics*, Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1967.

[40] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory*, North-Holland, Amsterdam, Vol.1, 1989, Vol. 2, 1999.

[41] S. Pincus, R. E. Kalman. Not all (possibly) "random" sequences are created equal, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 94 (1997), 3513–3518.

[42] S. Pincus, B. H. Singer. Randomness and degrees of irregularity, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 93 (1996), 2083–2088.

[43] M. B. Pour-El and J. I. Richards. *Computability in Analysis and Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[44] H. Rice. Recursive reals, *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954), 784–791.

[45] T. A. Slaman. *Random Implies Ω-Like*, manuscript, 14 December 1998, 2 pp.

[46] T. A. Slaman. Randomness and recursive enumerability, *SIAM J. Comput.* (to appear).

[47] R. I. Soare. Recursion theory and Dedekind cuts, *Trans. Amer. Math. Soc.* 140 (1969), 271–294.

[48] R. I. Soare. *Recursively Enumerable Sets and Degrees*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[49] R. M. Solovay. *Draft of a paper (or series of papers) on Chaitin's work ... done for the most part during the period of Sept.–Dec. 1974*, unpublished manuscript, IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, May 1975, 215 pp.

[50] R. M. Solovay. A version of Ω for which ZFC can not predict a single bit, in C.S. Calude, G. Păun (eds.). *Finite Versus Infinite. Contributions to an Eternal Dilemma*, Springer-Verlag, London, 2000, 323-334.

[51] E. Specker. Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, *J. Symbolic Logic* 14 (1949), 145–158.

[52] L. Staiger. The Kolmogorov complexity of real numbers, in G. Ciobanu and Gh. Păun (eds.). *Proc. Fundamentals of Computation Theory*, Lecture Notes in Comput. Sci. No. 1684, Springer-Verlag, Berlin, 1999, 536-546.

[53] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, and H. Woźniakowski. *Information-Based Complexity*, Academic press, New York, 1988.

[54] A. M. Turing. On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. Amer. Math. Soc.* 42 (1936-7), 230-265; a correction, ibid., 43 (1937), 544-546.

[55] R. von Mises. *Mathematical Theory of Probability and Statistics*, Edited and Complemented by Hilda Geiringer, Academic Press, New York, 1974.

[56] K. Weihrauch. *Computability*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

THE INCOMPLETENESS AND THE ARGUMENT LUCAS-PENROSE

VIRGIL DRĂGHICI

Abstract

This paper intends to make explicit, in a logical-mathematical frame, the conceptual mechanism of the Lucas/Penrose argument. It also offers some remarks about consequences stated on the basis of this argument.

The phenomenon of incompleteness represents one of the greatest logical mathematical discoveries of the 20^{th} century. The consequences of this discovery concerns both the foundational investigations in the philosophy of mathematics and the ontological investigations with a more general character, including those concerning the philosophy of mind. In the following we shall investigate this last aspect in the context of Lucas/Penrose (L/P) argument.

Couched initially by Nagel and Neuman [1] and by J.R. Lucas [1], the argument invokes the phenomenon of incompleteness in explaining the non-algorithmic nature of mathematical thought. Due to the criticism it had provoked this argument has been refined, especially by the two Penrose's papers [1] and [2].

Even though we'll refer to this argument as "the argument L/P", our investigation confines to the way in which Penrose uses Gödel's first incompleteness theorem as argument against the computational model of mathematical thought.

First let us inquire the structure of this argument.

1. The halting problem as a mathematical problem

In the most general sense the concept *algorithm* means a finite systematic procedure by which we find a solution to a given problem. Though such procedures have been used even from the ancient times (e.g. Euclid's algorithm for finding the highest common factor of two numbers, the concept as such has gained a rigorous meaning only by Turing's work [1], respectively by the "Turing machine" concept[1] (i.e. an algorithm is what can be made by a Turing machine). The intention of this eminent English mathematician was to solve "Hilbert's tenth problem"[2] (*Entscheidungsproblem*), viz. the problem of existence of a general mechanical procedure to decide, in principle, all mathematical problems belonging to some well-defined class.

Turing's investigations represent as well a summary of mathematical investigations from this time. During 1932-35 Church and Kleene have considered that "λ-definable functions" form, in fact, the class of functions subordinated to the intuitive concept of "computability". In 1934 Gödel [2] defines the class of "general recursive functions". In 1936 Church [1] and Kleene [1] prove the equivalence between the class of λ-definable functions and the class of general recursive functions.

In the same time Church proposed the well-known thesis: all (effectively) calculable functions are λ-definable or, equivalently, general recursive. In 1936-7 Turing [1] introduced the class of "Turing computable functions", of which he said (Turing's thesis) that it represents the class of λ-definable / general recursive functions; whence the equivalence of the two theses (and hence the Church-Turing thesis).[3]

This problem, in Turing's terminology, becomes the halting problem of the *Turing machine*, or the problem of deciding whether or not the n^{th} Turing machine would actually ever stop when acting on the number m.

Let us see now how we arrive at such a mathematical problem and what structural connections it has with Gödel's incompleteness theorem (Th.G1).

Firstly, the concept of Turing machine.[4] Such a theoretical concept is characterized by its potentially infinite memory and by performing without errors of preassigned instructions. Every machine has a finite fixed number of possible *states* (i.e. a finite list of rules/instructions or a finite description of *the algorithm*). At any given moment, t_0, t_1, t_2,

[1] "Turing machine" is a mathematically idealized "machine" and not a physical object.

[2] posed by Hilbert at the Paris International Congress of Mathematicians (1900) and later at the Bolonia International Congress (1928).

[3] for a more elaborated analysis of this thesis: comp. Kleene [4], §§62,70.

[4] we represent it only schematic; for details, see Penrose [1] ch.2 and [2] ch.2

the machine shall be in one of $s+1$ states, $0, 1, 2, \ldots, s$. The first is the passive state, the others active. A potentially infinite tape to the right and to the left, marked with squares, passes through the working machine. Each square comprises one of the symbols 0 and 1 (the input of the machine).

We suppose now that at an arbitrary moment t_i the machine is in one of its active states $1, \ldots, s$, and in every moment, beginning with t_0, only one square of the tape is scanned by the machine. Between the moment t_i and the moment t_{i+1} the machine can perform an act consisting of the following three operations:

1. replace the symbol 0 or 1 of the just scanned square by the same symbol or by a symbol different from 0 and 1
2. move the tape so as at the next moment to scan the next square to the left of the scanned square; leave the tape unmoved; move the tape so as the next moment to scane the square next to the right of the scanned square
3. change to another state or remain unchanged.

The behaviour of the machine is complete determined by the machine-state and the input (i.e. by the scanned-symbol: 0 or 1). These two elements constitute the configuration of the machine. So, we can depict the machine on the basis of these elements.

Let us suppose the machine has the following configurations of symbols:

S	0	1	
0			
1	0C0	1R2	
2	0R3	1L32	
3	1L4	0C17	
4	0R9		
⋮	⋮	⋮	
190	1L110	0R190	(STOP)

This table represents the configuration of the machine, resp. the $s+1$ states and the two symbols 0 and 1. The columnes of symbols from under 0 and 1 describe the operations performed by the machine. For example, if the machine is in the active state 1 and scans 0, then it leave the symbol unchanged (C) and remains in the same state. And if the machine scans 1 then it moves to the right (R) and passes to the state 2. If in this state it scans 0 then the machine moves to the right (R) and assumes the state 3 (0R3). If in this state the machine scans 0 then it replaces 0 with 1, moves to the left (L) and assumes the state 4, etc. (The symbols of this example are arbitrary).

The entire behaviour of the machine is "condensed" in this table. If we know the table, we know the machine. However, the table can be represented in one *codified* form, in various ways. Either by representation of the machine states in a binary scale (whose totality gives us *the code* of this machine (cf. Penrose [1],2), or by rewriting the above table in a code form, stringing the 190 states of the machine (separating by commas the operations corresponding to the scanned symbol, 0 or 1, and by semicolons the states of the machine) (cf. Kleene [4],V). In this later case we get

0C0, 1R2; 0R3, 1L32; 1L4, 0C17;...; 1L110, 0R190

With such a procedure the code of any machine can be written with the following 15 symbols from the above sequence: LCR,;0123456789. Then these symbols can be interpreted in the number system based on 15, obtaining a positive integer which describes the machine table and which is *the index* of the machine.[5] Let $T(n, m, x)$ be the following predicate: "the n^{th} Turing machine (or the Turing machine whose number/index is n) which, when applied to m as argument, computes, at moment x, the value of the function

[5]Kleene [4], §32 uses the method for enumeration of the algebraic equations ("method of digits"). If the alg. equations are enumerable (i.e. the equations of this sort: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, with $n \geq 1$, $a_0 \neq 0$), then the algebraic numbers (i.e. any number that is a real root of an algebraic equation with a variable x and integral coefficients) can also be enumerated. For this purpose we replace every equation from this enumeration with its distinct real roots (at most n different roots) and obtain an enumeration with repetitions of the real algebraic numbers. And the enumeration of alg. equations can be made writing every equation in the form of n linear sequence of symbols, letting down the exponents. An equation of the sort $5x^4 + 12x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$ becomes $5x4 + 12x3 - 7x2 + x + 1 = 0$, expression in which only 14 symbols appear and which can be the symbols (digits) in a number system based on 14. In this way any equation becomes an expression of a natural number.

$\varphi_n(m)$".

If the values n, m, x are given, then we can determine whether n does describe or not (in the considered number system) the machine table. If it does, then at the moment x the machine T_n computes the value of the function φ_i for the argument m. If it does not, then no. So the predicate $T(n, m, x)$ is decidable. Being decidable there is a Turing machine, which decides it (computing its representing function).

However, we have to remark, $\varphi_n(m)$, as a function of n and m, is not defined for every n and m; resp. is defined only if $(Ex)T(n, m, x)$. So is a partial function of two variables n and m. Since we have an algorithm for finding the values of $\varphi_n(m)$, there is a machine $U(n, m)$ which calculates $\varphi_n(m)$ as a partial function of n and m, called a universal Turing machine (for it can find the values of any computable function $\varphi(m)$). If $\varphi(m)$ is computed by the machine T_n, for calculation of $\varphi(m)$ we apply the U machine on the pair of numbers n and m. In this case n has the role of the program which shows to the U machine what kind of function of m it has to calculate. If n is given, then the universal machine U, which actions on the pair of numbers n and m, behaves itself as a Turing machine T_n.

So

$$U(n, m) = T_n(m)$$

b) **"Entscheidungsproblem" as an unsolvable problem**

Let us start from a simple theorem, which "concentrate" the essence of the decision problem, resp.

Th.1. *The function $\psi(m)$ defined by*

$$\psi(m) = \begin{cases} \varphi_m(m) + 1 \ \textit{if} \ (Ex)T(a, a, x) \\ 0 \ \textit{otherwise} \end{cases}$$

is not computable.

Proof. (*reduction ad absurdum*). Suppose $\psi(m)$ were computable. Hence there is a machine T_k which computes it, so that $\psi(m) = \varphi_k(m)$, for al m. For $m = k$ we obtain $\psi(k) = \varphi_k(k)$. Since T_k computes $\psi(m)$, we have $(Ex)T(k, m, x)$, for all m and therefore we shall have also $(Ex)T(k, k, x)$. Whence, from the definition of the function $\psi(m)$ we obtain $\psi(k) = \psi_k(k) + 1$, contradicting the preceeding equation.

In order to see what the ground of such a result is, we give an analogue in terms of non-halting of a Turing machine. More general, the problem is to decide whether or not a specific Turing machine is going to stop. Or, otherwise expressed, is there any algorithmic procedure so as to answer to the general problem of halting? Turing's answer is negative and is based on the following proof (*reductio ad absurdum*).[6]

We suppose that there is such an algorithm. Then there is a Turing machine H which says us whether or not the n^{th} Turing machine stops for m as argument; if it does stop then it will print one 1, otherwise 0. So

$$H(n,m) = \begin{cases} 1 \text{ if } T_n(m) \text{ stops} \\ 0 \text{ if } T_n(m) = * \text{ (does not stop)} \end{cases}$$

Suppose, then, that using the relation $T_n(m) \times H(n,m)$,[7] the n^{th} Turing machine, corresponding to the values of the argument m and the result is this table:

nm	0	1	2	3	4	5	...
0	0	0	0	0	0	0	...
1	0	0	0	1	0	0	...
2	1	0	1	1	1	0	...
3	1	2	1	2	1	2	...
4	0	1	0	2	0	1	...
5	1	2	3	4	5	6	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

The existence of the algorithm H warrants the computability of any row of the above table. Hence, there is a Turing machine $Q(n,m)$ so that

$$Q(n,m) = T_n(m) \times H(n,m).$$

[6]cf. Penrose, [1],2.

[7]the use of this relation is needful for elimination of "undeterminacies" from the table, resp. of the cases in which the machine does not stop (for in these cases no value can be written in the table, because the machine does not stop!)

In the following the proof uses the well-known method of diagonalization (Cantor's). Respectively, we shall consider the diagonal sequence 0,0,1,2,0,6,... and we add 1 to every term of this sequence, obtaining 1,1,2,3,1,7,.... By this procedure (of calculation) we obtained a new sequence $1 + Q(n, m)$ or $1 + T_n(m) \times H(n, n)$. This sequence must be amongst the rows of the table, for this table contains all computable sequences. But this sequence differs from the first row by first term, from the second by the second term, and so on. Contradiction! Therefore, such a Turing machine does not exist; in consequence, there is no universal algorithm for deciding whether or not a Turing machine is going to stop. Therefore, *Entschiedungsproblem* has no solution.

The above argumentation can be given in the following manner.

With the assumption of the existence of H we can conclude on the existence of a Turing machine for the algorithm $1 + Q(n, m)$:

$$1 + T_n(n) \times H(n, n) = T_k(n).$$

By diagonalization, $n = k$, the relation becomes

$$1 + T_k(k) \times H(k, k) = T_k(k).$$

We have obtained thus a contradiction, for if $T_k(k)$ stops, then $H(k, k) = 1$ and, therefore, the impossible relation

$$1 + T_k(k) = T_k(k).$$

And if $T_k(k)$ does not stop, then $H(k, k) = 0$ and thus the impossibility

$$1 + 0 = *$$

In conclusion, there is no universal algorithm for deciding the stopping of a Turing machine.

This argument L/P does not show us that we dispose of a Turing machine for which the undecidability of its halting / non-halting has an absolute sense. On the contrary, the above procedure allows *us to see* that the machine does not stop. (We saw that in the case of stopping we obtained a contradiction). But the algorithm cannot express this fact, for if it did we should obtain another contradiction! However, *we* know that the machine does not stop. So, Penrose argues, the human mind outdoes the algorithm. All what we have to do is to find such a k; the case in which we are building the algorithm which cannot give us the answer, but in connection with which we know the answer. And the finding of k is possible, in principle, by examination of the construction of the algorithms $H(n, m)$ and $T_n(m)$, in connection with which the above machine $1 + T_n(n) \times H(n, n)$ is constructed.

2. The Penrose's form of the Gödel's incompleteness theorem

Penrose expresses this remarkable Gödel's result in the terms of a Turing machine. For this purpose he generalizes the concept of computability in the following way: instead of the halting / non-halting of a Turing machine when it performs *a* calcul, now is considered a Turing machine acting on a natural number n. In this way, the computing operation $C(n)$ upon the number n decomposes into the computing operations $C(0), C(1), C(2), \ldots$, for each natural number 0,1,2,..., these being all computations that can be listed.

We suppose now that we have a computational procedure A which when terminates, indicates us the fact that we have a demonstration that $C(n)$ does not ever stop. And that such a procedure contains all the procedures available to a mathematician for demonstrating the non-halting of $C(n)$. Therefore, A is a specified calculation which, when the numbers q, n are given, tell us that $C_q(n)$ does not stop. Otherwise stated, when A terminates, we have a demonstration that $C_q(n)$ will never halt; hence

1. If $A(q, n)$ stops, then $C_q(n)$ does not stop.

If by diagonalization we make $q = n$, we obtain

2. If $A(n, n)$ stops, then $C_n(n)$ does not stop.

Since $A(n, n)$ depends upon just one number n, it must be one of the above computations $C_0, C_1, C_2, \ldots$ (since the list $C_0, C_1, C_2, \ldots$ contains all the computations!). Let this be $C_k(n)$. Again, by diagonalization, for $n = k$, we have

3. $A(k, k) = C_k(k)$.

Whence, from 2, for $n = k$, we obtain

4. If $A_k(k)$ stops, then $C_k(k)$ does not stop.

From 3 and 4, we have

5. If $C_k(k)$ stops, then $C_k(k)$ does not stop.

So $C_k(k)$ *does not stop*. From this we deduce that $A(k,k)$ does not stop too, for from 3, $A_k(k) = C_k(k)$. Also, although $C_k(k)$ does not ever stop, the above procedure A can*not* tell us that $C_k(k)$ does not stop. For on the supposition of the soundness of A we *know* that $C_k(k)$ does not stop it follows that we know something that A is unable to ascertain. This is the meaning of Gödel's theorem, via Turing machines, in Penrose's view. Thus, Penrose concludes:

$\mathcal{G}$. Human mathematicians are not using a knowably sound algorithm in order to ascertain mathematical truth ([2],76).

This Penrose's conclusion is the consequence of the remarkable theoretical results concerning the computability and decidability. Let us see now, succint, the conceptual foundation of this conclusion.

3. The predicate $T(i, a, x)$ and the phenomenon of incompleteness

As above, let $T(i, a, x)$ be a *decidable* predicate with the following meaning: "i is the index of a Turing machine T_i, which when applied to a as argument, computes at the moment x the value of the function $\varphi_i(a)$". $\varphi_i(a)$ is a computable and partial function of i and a, resp. a function that is not defined for every i and a, but only if $(Ex)T(i, a, x)$.

Noncalculability of the function $\psi(a)$ from Th.1 founds the proof of the following theorem:

Church's theorem. *The predicate $(Ex)T(a, a, x)$ is undecidable (resp. its representing function is uncomputable).*[8]

Proof. (*reductio ad absurdum*). Suppose that $(Ex)T(a, a, x)$ is decidable. In this case, for a given value of a we can decide whether or not $(Ex)T(a, a, x)$. If not, we write 0; if the answer is "yes", then there exists a Turing machine T_a, for a as argument, which calculates the value $\varphi_a(a)$. If to this result we add 1, follows that the function $\psi(a)$ from

[8] A predicate $P(a)$ is decidable if its representing function $\chi(a)$, defined as $\chi(a) = \begin{cases} 0, & \text{if } P(a) \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$, is computable.

Th.1 is computable (contrary to Th.1). Whence, by contraposition, we have the result of Church's theorem.

However, the undecidability of the predicate $(Ex)T(a,a,x)$ founds a more general result concerning the undecidability. If S is a formal system, *consistent* and *complete* for this predicate, then the above bi-implication (i.e. the implications that express direct and converse the two conditions for S) is a valid one.

$$(\alpha) \quad (Ex)T(a,a,x) \equiv \vdash_S \exists \mathrm{xT}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$$

where the symbolic structure $\exists \mathrm{xT}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ is a formula that expresses in S the predicate $(Ex)T(a,a,x)$ [with (α_1) as direct implication and (α_2) the converse].

Th.2. *S is undecidable (i.e. there is no decision procedure for the provability in S).*

Proof. (*reductio ad absurdum*). Suppose that there is such a procedure. Then, for a given a we can find a formula $\exists \mathrm{xT}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$, about which, by application of the procedure, we can say whether or not it is provable. Whence, through (α) we can conclude on the decidability of the predicate $(Ex)T(a,a,x)$, contrary to the Church's theorem. By contraposition we conclude on undecidability of S.

Let be now the condition (α) as applied to the formulae $\neg\exists \mathrm{xT}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$, therefore

$$(\beta) \quad (\overline{Ex})T(a,a,x) \equiv \vdash_S \neg\exists \mathrm{xT}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$$

[with (β_1) the direct implication and (β_2) the converse].

But, the direct implication (β_1) from (β) does not hold for every a. If it did, then we could conclude on the decidability of the predicate $(Ex)T(a,a,x)$ (by (α_1)). So, *the generalized form of the Gödel's theorem* (Kleene)[9]. There is a formel in S $\exists \mathrm{xT}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ such that

1. $\neg\exists \mathrm{xT}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ is true.
2. $\neg\exists \mathrm{xT}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ is not provable in S.
3. $\exists \mathrm{xT}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ is not provable in S.

Proof. If the formula $\neg\exists \mathrm{xT}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ was provable in S, then there will be a Turing machine T_p, with a as argument, which search in the enumerable set of proofs in S for a

[9] comp. Kleene [2] and [4] §60

proof of this formula. In this case we had the equivalence

$$(\gamma) \quad T(p,a,x) \equiv \vdash_S \neg\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$$

1. (*Reductio ad absurdum*). Suppose $(Ex)T(p,p,x)$. By (γ) we have $\vdash_S \neg\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$, and by (β) we deduce $(\overline{Ex})T(p,p,x)$, contrary to our supposition. Therefore, $(\overline{Ex})T(p,p,x)$; hence $\neg\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ is true.

2. From the truth of this formula (i.e. $(\overline{Ex})T(p,p,x)$, by (γ) we conclude on non-demonstrability of the formula $\neg\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$.

3. (*Reductio ad absurdum*). We suppose that $\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ is provable in S. By (α) obtain $(Ex)T(p,a,x)$. Also, $\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ is true, contrary to 1. Therefore $\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ is not provable in S.

The formula $\neg\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ formally expresses a sentence equivalent with its unprovability (it is a Gödel sentence for S).

In the proof of 1 we use as assumption (β) (in fact, only (β_2)). However, the proof can be done using the simple consistency instead of (β_2). For if $(Ex)T(p,p,x)$ was true, then by (α_1) and (γ) we obtain an inconsistency (resp. $\vdash_S \exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p},\mathrm{x})$ and $\vdash_S \neg\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p},\mathrm{x})$). Whence, by contraposition, on the consistency assumption, we have 1. We have therefore

$$(\delta) \quad Cons_S \supset \neg\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p},\mathrm{x}),$$

where $Cons_S$ is the formula that expresses the consistency of S. Yet this implication is provable in S.

$$(\varepsilon) \quad \vdash_S Cons_S \supset \neg\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p},\mathrm{x})$$

Now, if $Cons_S$ was provable in S, then by *modus ponens* we deduce the provability of the consequent, contrary to the 2 from the above theorem. Whence, by contraposition, we conclude on the unprovability of consistency of a system in the system itself. Thus

Th.G2 (the 2^{nd} Gödel's theorem). *non* $\vdash_S Cons_S$.

But, on the basis of the unprovability of the predicate $(Ex)T(a,a,x)$ we can also demonstrate the inexistence of a decision procedure for the provability in first-order predicate calculus (resp. the undecidability of CP1).[10] What we have in these cases is a re-

[10] cf. Church [1], Turing [1], Kleene [3] §45.

duction of the decision problem for the predicate $(Ex)T(a,a,x)$ to the decision problem for the provability in N/CP1. But the converse of this reduction is possible too, on the ground of the following Kleene's result:[11]

The enumeration theorem. *For every general recursive predicate $R(a,x)$ there is a number f, so that $(Ex)R(a,x) \equiv (Ex)T(f,a,x)$, resp. $(x)R(a,x) \equiv (x)\overline{T}(f,a,x)$.*

For the different values of f we obtain the corresponding sequence: $(Ex)T(0,a,x)$, $(Ex)T(1,a,x), (Ex)T(2,a,x), \ldots$, that is an enumeration with repetitions of all predicates of the form $(Ex)R(a,x)$. Similarly, $(x)\overline{T}(f,a,x)$ enumerates the predicate of the form $(x)R(a,x)$. By one application of Cantor's diagonal method we obtain the following major results:

1. Every gen. rec. predicate $P(a)$ is expressible both in the form $(Ex)R(a,x)$ and in the form $(x)S(a,x)$, with R and S primitive recursive (taking $P(a,x) \equiv (P(a)\&x = x)$); where $P(a) \equiv (Ex)P(a,x) \equiv (x)P(a,x)$ and, on the basis of Corol. ([1],57): The class of the predicates expressible in a given form consisting in a fixed succession of quantifiers prefixed to a predicate R whether a general recursive R or a primitive recursive R be allowed.

2. Conversely, every predicate expressible in both forms, with R and S gen. rec., is general recursive (for supposing the above equivalences, we have: $\overline{P}(a) \equiv (Ex)\overline{S}(a,x)$ (the 2^{nd} eq.); from *tertium non datur*, we obtain $(Ex)[R(a,x) \vee \overline{S}(a,x)]$. So, $P(a) \equiv R(a, \mu x[R(a,x) \vee \overline{S}(a,x)])$).

3. A predicate $P(a)$ is general recursive iff $P(a)$ and $\overline{P}(a)$ are (both!) expressible in the form $(Ex)R(a,x)$, with R general recursive and $(a)(P(a) \vee \overline{P}(a))$.

Th.3.1. *Let $R(a,x)$ be decidable. Then*

1. The predicate $(Ex)T(a,a,x)$ is not expressible in the dual form $(x)R(a,x)$.

2. The predicate $(x)\overline{T}(a,a,x)$ is not expressible in the dual form $(\exists x)R(a,x)$.

3. $(x)\overline{T}(a,a,x)$ and $(Ex)T(a,a,x)$ are not decidable (Church's th.).

Proof 1. By the enumeration theorem we have

(a) $(Ex)R(a,x) \equiv (Ex)T(f,a,x)$

[11] cf. Kleene [1], [2] §57, [3] §46.

Substituting f for a in (a) we obtain

(b) $(Ex)R(f,x) \equiv (Ex)T(f,f,x)$, also

(c) $(Ex)R(f,x) \not\equiv \overline{Ex}T(f,f,x) \equiv (x)\overline{T}(f,f,x)$.

Proof 2. By the same theorem

(a) $(x)R(a,x) \equiv (x)\overline{T}(f,a,x)$, where, substituting f for a in (a):

(b) $(x)R(f,x) \equiv (x)\overline{T}(f,f,x)$

(c) $(x)\overline{T}(f,f,x) \equiv (\overline{Ex})T(f,f,x) \not\equiv (Ex)T(f,f,x) \equiv (Ex)R(f,x)$.

Proof 3. Using the equivalence $R(a) \equiv (Ex)[R(a)\&x = x] \equiv (x)[R(a)\&(x = x)]$, resp. $R(a) \equiv (\exists x)R(a,x) \equiv (x)R(a,x)$. By the enumeration theorem we have

$$R(f) \not\equiv (Ex)T(f,f,x) \text{ and } R(f) \not\equiv \overline{T}(f,f,x).$$

Therefore, the predicates $(Ex)T(a,a,x)$ and $(x)\overline{T}(a,a,x)$ are indecidable. The predicate $(x)\overline{T}(a,a,x)$, for example, is a predicate of the form $(x)R(a,x)$ with R decidable (gen. rec.),[12] which is not expressible in the dual form $(\exists x)R(a,x)$, with R decidable (rec.). So, the equivalence

(a) $[(x)\overline{T}(a,a,x) \equiv (Ex)R(a,x)]$

does not hold for every gen. rec. predicate $R(a,y)$, i.e. the value f for a, in 2(b) is a value for which the above equivalence does not hold for a given $R(a,x)$. Also, the predicate $(x)\overline{T}(a,a,x)$ is not general recursive.

As by the enumeration theorem $(Ex)T(f,a,x)$ enumerates all predicates of the form $(Ex)R(a,x)$, with R recursive, by Cantor's diagonal method $(\overline{Ex})T(a,a,x)$ (eq. $(x)\overline{T}(a,a,x)$) is a predicate not in the enumeration. As all general recursive predicates are enumerable (and the predicate of the form $(Ex)R(a,x)$ as well with R recursive), results that they cannot constitute all number-theoretic predicates. The above predicate, $(x)\overline{T}(a,a,x)$ is a predicate of the form $(x)R(a,x)$, which does not allow the dual form $(Ex)R(a,x)$ and is not general recursive.

These considerations allow the following theorem:

[12] cf. Mostowski, [1]

Th.3.2. *Let be the following predicates*

$$R(a) \quad \begin{array}{lll} (Ex)R(a,x) & (x)(Ey)R(a,x,y) & (Ex)(y)(Ez)R(a,x,y,z)\dots \\ (x)R(a,x) & (Ex)(y)R(a,x,y) & (x)(Ey)(z)R(a,x,y,z)\dots \end{array}$$

with R decidable. To each form (after the first) there is a predicate expressible in that form but not in the form dual to it, nor in any of the forms with fewer quantifiers.

On the basis of a theorem of Post[13] the degrees of a decidable predicate and the degrees of the predicates $(Ex)T(a,a,x)$, $(x)(Ey)T(a,a,x,y)\dots$ form a sequence $0 < 0' < 0'' < 0''' < \dots$

With these considerations Church's theorem (3.1.3) appears as an application of the theorem 3.2 for the predicate $R(a)$. Kleene [1] speaks, in this case, on the nonexistence of an algorithmic complete theory for the predicates $(Ex)T(a,a,x)$ and $(x)\overline{T}(a,a,x)$; an algorithmic complete theory for a predicate $P(a)$ is the finding of an equivalent effectively decidable predicate $R(a)$ (resp. to express $P(a)$ in the form $R(a)$ with R general recursive[14]). While for every predicate of the form $R(a)$, with R general recursive, there is an algorithmic complete theory, to each of the other forms there is a predicate for which no such theory is possible; therefore, Church's theorem.

A similar situation we find for Gödel's incompleteness theorem. In this case Kleene takes into considerations the complete formal-deductive theories for an arbitrarily predicate $P(a)$. A deductive construction (formal theory / formal system) gives us the possibility of a coherent ordering of the true propositions considered as values of the predicate $P(a)$. These propositions are expressible in the system S by some formulae, and the system has to be so constructed as to proof only the formulae that express the instances of respective predicate (i.e. propositions).

And for us to see if a sequence of formulae is a proof of $P(a)$, for a given a, is to have the possibility of verification (of ascertain) this fact. This verification procedure requests

[13] Post [1], comp. Kleene [2], §46.

[14] Church's thesis (I: Every effectively calculable function (effectively decidable predicate) is general recursive) and its converse form a rigorous definition of the notion *algorithm* (decidable/calculable procedure). To give a decision procedure for the predicate $P(a)$ is to give a general recursive predicate $R(a)$, so that $P(a) \equiv R(a)$.

the metamathematical predicate:

$\mathcal{R}(a, X)$: X is a proof in the formal system S of the formula that expresses the proposition $P(a)$.

If $\mathrm{P}(\boldsymbol{a})$ is the formula expressing in S $P(a)$, then the provability of $P(a)$ in S is expressible as $(EX)\mathcal{R}(a, X)$. Therefore, we have the equivalence

(1) $(EX)\mathcal{R}(a, X) \equiv \vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{a})$.

By a proper Gödel numbering the metamathematical predicate $\mathcal{R}(a, X)$ can be "translated" into a number-theoretic predicate $R(a, x)$, taken as true when x is a proof of a, false otherwise. Certainly, the predicate $R(a, x)$ should be effectively decidable. By the Church's thesis we deduce its the general recursivity. By translation, (1) becomes

(2) $(Ex)R(a, x) \equiv \vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{a})$.

On the basis of these considerations and of Church's thesis (I) Kleene formulated the thesis II: for any given formal system S, where the values of the predicate $P(a)$ are expressed by the distinct formulas $\mathrm{P}(\boldsymbol{a})$ $(a = 0, 1, 2, \ldots)$, the predicate "$\mathrm{P}(\boldsymbol{a})$ is provable in S" is expressible in the form $(Ex)R(a, x)$, with R gen. rec. (cf. rel. (2)).

This thesis expresses the idea that the role of a deductive systems for the predicate $P(a)$ is to make explicit the sense of a proof of $P(a)$ for a given a, or, otherwise couched, it expresses the structural requirement for an S to constitute a formalization of the theory of the predicate $P(a)$.

And the converse of this thesis does hold, resp. if a predicate of the form $(Ex)R(a, x)$ is given, where R is gen. rec., we can always construct a formal system, with an explicit concept of provability, in which all true propositions $P(a)$ and only those are provable.[15] Therefore, the thesis I and its converse show us that the predicate form $(Ey)R(x, y)$ represents the notion of provability in a formal system S; for the predicates expressible in the form $(Ex)R(a, x)$, where R gen. rec., are in fact the predicate expressible by $\vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{a})$ in S, with $a = 0, 1, 2, \ldots$

The correlation between the provability of the formulas $\mathrm{P}(\boldsymbol{a})$ and the proposition $P(a)$ that they express is given by biimplication

[15]cf. Kleene [4], §60.

(3) $\vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{a}) \equiv P(a)$

where the direct implication expresses the consistency (correctness) of S, and its converse the *completitude* of S. To these two conditions on S we add the requirement of thesis II, resp. the biimplication

(4) $(Ex)R(a,x) \equiv P(a)$,

where R is general recursive, in which the direct implication expresses the correctness of S for the predicate $P(a)$, and its converse the completitude.

On the basis of thesis II and the converse we can say that to give a complete deductive system for the predicate $P(a)$ means to find an equivalent predicate of the form $(Ex)R(a,x)$ where R is gen. rec. We suppose now $P(a)$ is the predicate $(x)\overline{T}(a,a,x)$. By the theorem 3.1.2, for every gen. rec. R there is a number $a = f$ so that the equivalence (4) does not hold. Hence, *the generalized Kleene form of Gödel's theorem: there is no correct and and complete formal system for the predicate* $(y)\overline{T}_1(a,a,x)$.

In this case, the generalized formulation of Gödel's theorem appears as an application of the theorem 3.2 for the predicate form $(Ex)R(a,x)$. Thus, to each predicate of the form $R(a)$ and of the form $(Ex)R(a,x)$, where R is gen. rec., there are complete deductive theories, to each of other forms there is a predicate for which no such theory is possible.

The proof is simple. We suppose that $(x)\overline{T}(a,a,x)$, eq. $(\overline{Ex})T(a,a,x)$, is provable. Then, there is a formula $\neg\exists \mathrm{x} T(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\mathrm{x})$ expressing the above predicate such that (3) does hold. Therefore, we have

$$\vdash \neg\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\mathrm{x}) \equiv (\overline{Ex})T(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},x) \equiv (x)\overline{T}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},x)$$

Being provable, there is a proof of it; hence

$$\vdash \neg\exists \mathrm{x}\mathrm{T}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\mathrm{x}) \equiv (Ex)R(a,x).$$

Whence, from the above equivalences, we obtain the relation

$$(x)\overline{T}(a,a,x) \equiv (Ex)R(a,x)$$

contradicting the theorem 3.2.

Remark. The "special" character of the predicates $(Ex)T(a,a,x)$ and $(x)\overline{T}(a,a,x)$ can be made explicit also from the point of view of the concept *recursive enumerability* (of a set/class).

A set/class $K \in N$ is recursive enumerable if there is a general recursive function φ which enumerates it (allowing repetitions). Therefore, the succession of values $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ is such an enumeration of the members of K.

A class with only one element is recursive enumerable iff the predicate $a \in K$ is expressible in the form $(Ex)R(a,x)$ where R is general recursive; hence if the equivalence $a \in K \equiv (Ey)R(a,y)$ does hold, where R is primitive recursive in φ.

With this concept the thesis II (Kleene's) has the following equivalent: the class K of the numbers a for which $\mathrm{P}(\boldsymbol{a})$ is provable is recursive enumerable (if it has a member). K is general recursive if the predicate $a \in K$ is general recursive. Whence we deduce that every general recursive class is recursive enumerable (if it has a member) [from 1 p.12]. Similar, its complement $\overline{K}$ (for the predicate $\overline{a \in K}$ has the representing function $\overline{sg}|\psi|$, with ψ the representing function of the predicate $a \in K$, which is primitive/general recursive).

A class K is general recursive if both K and $\overline{K}$ are recursive enumerable [from 2 p.12].

Let be now the predicate $(Ex)T(a,a,x)$. The class of those a such that $(Ex)T(a,a,x)$ is recursive enumerable (by the Kleene's normal form theorem[16]), but this class is not general recursive (cf. th.3.1.3: $R(f) \not\equiv (Ex)T(f,f,x)$). Its complement, the set of a such that $(x)\overline{T}(a,a,x)$ is neither recursive enumerable (cf. th.3.1.2(c)) nor general recursive (cf. th.3.1.3).

Using the recursive enumerability Kleene elaborates a symmetric form of Gödel's theorem,[17] only with nonelementary assumption of the simple consistency. In comparison with Kleene's generalized theorem, the previous proof given by Rosser[18] is a corollary.

[16]Kleene [1], [2], [4] §58. Th.IX(29). For each $n \geq 0$, given any general recursive function $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, a number e can be found such that $(x_1)\ldots(x_n)(Ey)T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$. For the above predicate e is a member of K, for $(Ex)R(e,e,x)$.

[17]cf. Kleene [3], [4] §61, [5] §57

[18]Rosser, [1]

4. Conclusions

We made explicit the general conceptual frame, which founds the Penrose's conclusion. We summarize this exposition as it follows:

1. Penrose's form of Th.G1, stated in terms of Turing machine computations, reduces itself, as a matter of fact, to the following: if the halting of the calculation procedure A is a sufficient condition for the nonhalting of a Turing machine, then it is not a necessary one. Whence, on the assumption of the correctness of A, we deduce the incompleteness of A. The given proof of this theorem, we have said, is based of Cantor's standard diagonal argument, applied by Turing [1] in the proof of the undecidability of the halting problem of a Turing machine. Though as a form of Gödel's incompleteness theorem it is a variant of the generalized form of this theorem by Kleene.

2. We cannot overlook some inadvertences in Penrose's treatment of the logical concepts. Let us see only two of them.

The fundamental equivalence $\vdash_S \varphi \equiv \models \varphi$ expresses, by the direct implication, the sound (correct) character of S for φ, and by the converse, the completeness of S. In sec. 2.5 (74-75) Penrose explains the soundness of a computational procedure A by the statement that if A halts on input (q, n) then $C_q(n)$ does not halt. The consequent of this implication is an Π_1-sentence ($\neg\exists x \mathrm{T}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}, x)$, equival. $\forall x \, non \mathrm{T}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}, x)$). And soundness of A is a special case of soundness of the system S for Π_1 sentences. But in sec. 2.8 (91), in an account of Gödel's incompleteness theorem, Penrose says that if the formal system S "is *sound*, then it is certainly ω-consistent". But the two notions of soundness are different, since $\omega - Con$ is stronger than consistency (i.e. than soundness for Π_1 sentences). And this is an ambiguity in Penrose's account.

On the other hand, Penrose introduces (p.91) the notation $\Omega(F)$ for the assertion "the formal system F is Ω-consistent". And then: "Gödel's famous incompleteness theorem tells us that $\Omega(F)$ is *not a theorem* of F (i.e. not provable using the procedures allowed by F), provided that F is actually ω-consistent!" But, by Gödel's 2^{nd} theorem if S is *simply* consistent, then $Cons_S$ is not a theorem of S and thus, *a fortiori*, $\omega - Cons_S$ is not a theorem of S. Only for the proof of the *negation* of the sentence (resp. non $Cons_S$) is needed the assumption of ω-consistency.

3. Penrose tries to argue the above $\mathcal{G}$ sentence (76); resp., on the assumption of the soundness of S the mathematicians can know the truth of G, but S cannot prove this truth. However, in this ambiguity of the concept "sound", Penrose often takes in consideration a global sense, which is compatible with a Platonistic philosophy of mathematics. We know the sound character of an arithmetic formal system by grasping the truth of its axioms in the intended interpretation and by the fact that the rules of inference preserve truth. Grasping the soundness of S we attain the truth of G. Thus, Penrose endorses a unic/general sense of the concept of truth, in connection with which he founds the thesis $\mathcal{G}$.[19]

4. Penrose's argument in favour of Gödel's Platonism is incorrect. Truly, Gödel manifested such an option, but it did not gain the character of a strong thesis. On the problematic character of the assumption of the existence of arbitrary sets of natural numbers Gödel himself ([2], 50) wrote: "The result of the preceding discussion is that our axioms, if interpreted as meaningful statements, necessarily presuppose a kind of Platonism, which cannot satisfy any critical mind and which does not even produce the conviction that they are consistent."

The same thing on the Cohen's Platonism. Penrose ([2], 116) writes: "Cohen reveals himself to be, like Gödel, a true Platonist for whom matters of mathematical truth are ***absolute*** and not arbitrary. This is very much in accordance with my own view, cf. §8.7." Penrose refers here to the last section of Cohen's book [1] of 1966. However, in Cohen [2],13 we find something else: "By now it may have become obvious that I have chosen the Formalist position for set theory."

5. In the end, on the significance of Gödel's incompleteness theorem, Penrose says:

"... whatever... algorithm a mathematician might use to establish mathematical truth... there will always be mathematical propositions, such as the explicit Gödel proposition [for

[19]Certainly, by Th. G2, G cannot be proved by S. But a relative proof can be given in the following way: the verification of the consistency of a system S can be made by the reduction of this problem to the consistency problem of another system S_1, for which we have more compelling reasons for its consistency (cf. Feferman [1]).

the formal system associated with that algorithm], that his algorithm cannot provide an answer for. If the workings of the mathematician's mind are entirely algorithmic, then the algorithm (or formal system) that he actually uses to form his judgement is not capable of dealing with the [Gödelian] proposition... constructed from his personal algorithm. Nevertheless *we* can (in principle) see that [the Gödelian proposition] is true! That would seem to provide *him* with a contradiction, since *he* ought to be able to see that also. Perhaps this indicates that mathematician was *not* using an algorithm at all" ([1], 416-417).

Therefore, we have a non-identity between the class of arithmetical truths ratifiable by the human mind and the class of truths provable in a formal system. It follows that our arithmetical powers are not exhaustively mechanical.

This sort of argumentation has generated varied debates. Benacerraf [1], for example, considers that the argument Lucas/Penrose overlooks the possibility that human arithmetical capacity is indeed encoded in a particular formal system of which we cannot grasp any formal specification suitable for an application of the Gödelian construction. What follows from the Th. G1 is merely a disjunction: *either* no such system encodes all human arithmetical capacity (the arg. L/P) *or* any system which does have no axiomatic comprehensible specification.

As a matter of fact, this idea results from what Gödel himself said ([3], 310):

"For if the human mind were equivalent to a finite machine,... there would exist *absolutely* unsolvable Diophantine problems of the type described above, where the epithet 'absolutely' means that they would be undecidable, not just within some particular axiomatic system, but by *any* mathematical proof the human mind can concive. So the following disjunctive conclusion is inevitable: ...*the human mind (even within the realm of pure mathematics) infinitely surpasses the powers of any finite machine, or else there exist absolutely unsolvable Diophantine problems of the type specified.*"[20]

[20]This quotation is contained in an unpublished Gibbs Lecture of 1951, available now as a paper in [3] with an introductory note by G. Boolos, where he writes: "There is a gap between the proposition that no finite machine meeting certain weak conditions can print a certain formal sentence (which will depend on the machine) and the statement that if the human mind is a finite machine, there exist truths

REFERENCES

1. Anderson, A.R., [1] *Minds and machines*, Emglewood Cliffs, 1964.

2. Benacerraf, P., [1] God, the Devil and Gödel, *The Monist*, 51/1967, 9-12.

3. Church, A., [1] An unsolvable problem of elementary number theory, *American journal of mathematics*, 58/1936, 345-363.

   [2] A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of symbolic logic*, 1/1936, 40-41.

4. Cohen, P., [1] *Set theory and the Continuum Hypothesis*, New York: W.A. Benjamin, Inc., 1966.

5. Davis, M., [1] *The undecidable*, Hewlitt, N.Y. (Raven Press), 1965.

6. Feferman, S., [1] Hilbert's program relativized: proof-theoretical and foundational reductions. *Journal of symbolic logic*, 53/1988, 364-384.

7. Gödel, K., [1] Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. *Monatshefte für Mathematick und Physik*, 38/1931, 173-198.

   [2] On undecidable propositions of formal mathematical systems. Princeton 1934; reprinted in Davis [1], 39-74.

   [3] Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications (1951), in *Collected Works*, III, Oxford U.P. 1995, 304-323.

8. Kleene, S.C., [1] General recursive functions of natural numbers. *Math. Ann.* 112/1936, 727-742.

   [2] Recursive predicates and quantifiers. *Transactions of the American Mathematical Society*, 53/1943, 41-73.

---

that cannot be established by any proof the human mind can concive... it is certainly not obvious what it means to say that human mind, or even the mind of some one human being is a finite machine, e.g. a Turing machine. And to say that the mind (at least in its theorem - proving aspect), or a mind, may be represented by a Turing machine is to leave entirely open just how it is so represented" (p.293).

[3] A symmetric form of Gödel's theorem. *Konink. Nederl. Akad. van Wetensch.* 53/1950, 800-2.

[4] *Introduction to Metamathematics*, North-Holland P. Co, Amsterdam, 1952.

[5] *Mathematical Logic*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

9. Lucas, J.R., [1] Minds, machines and Gödel. *Philosophy* 36/1961, 120-4; repr. in A.R. Anderson [1].

10. Mostowski, A., [1] On definable sets of positive integers. *Fundamenta Mathematicae*, 34/1947, 81-112.

11. Nagel, E. and Newman, J.R. [1] *Gödel's proof*, Routlege and Kegan Paul Ltd, 1958.

12. Penrose, R., [1] *The Emperor's New Mind*, Oxford U.P. 1989, repr. 1989, 1990.

[2] *Shadows of the Mind*, Oxford UP, 1994.

13. Post, E.L., [1] Degrees of recursive unsolvability; abstract. *Bull. Amer. Math. Soc.* 54/1948, 641-642.

14. Rosser, B. [1] Extensions of some theorems of Gödel and Church. *Journ. of symbolic logic*, 1/1936, 87-91.

15. Turing, A.M., [1] On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. Lond. Math. Soc.*, (ser.2) 42/1937, 230-265; a correction 43, 544-6.

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

FALLACIOUS PRESUPPOSITIONS IN GÖDEL'S INDECIDABILITY THEOREM

I. NARIȚA

One of the famous achievement of contemporary logic was K. Gödel's argumentation that the axiomatic systems which contain arithmetic, (like the Russell and Whitehead's system in *Principia Mathematica*), if they are consistent, then they are also *indecidable*. This result was interpreted against *logicism*, as the foundation of mathematics program, which proposes just to embed the arithmetic in a logical system.

The decidability is the property of an axiomatic system (S) in which, for every well formed expression in that system (which isn't an axiom), we may establish if it is a theorem of the system or not, using only the axioms and the derivability rules accepted in *S*. Gödel's indecidability theorem shows that in such a system, we may always find a formula about which it's impossible to decide if it is theorem or not. Of course, the problem appears only in the case of consistent axiomatic systems because, for an inconsistent system, any formula is a theorem.

In this study we want to show that a generalized form of Gödel's theorem accepts incorrect presuppositions, so that, it must be rejected. Starting from the principle that if the general case is rejected, then the particular case must be rejected too, it follows that exist powerful objections about Gödel's theorem.

A variant of Gödel's theorem is the following:

1. Let *S* be an axiomatic system in which every number's predicates are definable. This condition is essential, otherwise it couldn't possible to define the predicate "gödelian" in *S*. Such a system is, in Gödel's opinion, the system of Russell and Whitehead in *Principia Mathematica*. This example is followed especially by Gödel, that results from the fact that Gödel takes into consideration the Russell's types theory. The well formed formulas are only those which contain expressions of the following kind: $x_{n+1}(x_n)$, where the indexes indicate the type of the variable, so, an expression like $x_3(x_1)$ isn't well formed in that system.[1] Also, let's suppose that *S* is decidable, respectively, we can say about any formula if it is theorem or not and, if an well formed expression is not a theorem, then, his negation is a theorem in S.

2. By the procedure named *arithmetization*, a number and only one is associated to any formula which is expressible in S. There are some methods to perform such an operation. For example, Gödel crosses the following steps:[2]

a) to any primitive symbol of the system a natural number is associated according to the following table:

[1] Kneale W. & M.: *1975*, p. 353.
[2] *idem*, p. 353.

primitive symbol	associate number
0	1
f	3
~	5
∨	7
∀	9
(	11
)	13

Next, numbers of the form p^n are associated to the variables of the type "n", where *p* is a prime number greater than 13. So, to variable x_1 it is associated the number 17, to x_2, the number 17^2 etc.

b) if s_i are the numbers which are correlated with the symbols of an expression (e) which is well formed in S, then, the number $2^{s_1} \times 3^{s_2} \times \ldots \times (p_k)^{s_k}$ corresponds to the expression *e*, where p_j are the first *k* prime numbers. In this way a natural number and only one is associated to each well formed expression in S. Further, because of the property of the natural numbers to have an unique decomposition in prime factors, we can calculate, for any natural number the expression which corresponds to it.

c) a simplified arithmetization method is imagined by W.v.O. Quine.[3] He attributes to each primitive symbol a natural number in the following manner:

primitive symbol	associate number
~	1
&	2
(	3
)	4
=	5
+	6
.	7
x	8
`	9
0	0

In order to obtain the correspondent number to an well formed expression in S, the figures which are associated to the primitive symbols are arranged in the order of component symbols. For example, to the expression (x)(x = x) there corresponds the number 38438584. Reciprocally, the expression which corresponds to a natural number results by the substitution of figures which compose the number with correspondent symbols in the same order. So, to the number 30960945099 there corresponds the expression (0` + 0`) = 0``, respectively, (1 + 1) = 2, if we take into consideration that the

[3] Becker O.: *1968*, p. 147.

symbol "`" is for the successor of a natural number. It's easy to observe that there exist the natural numbers which aren't the associated formulas. For example, to the number 32854 there corresponds the expression (& x =) which isn't well formed in S. The main fact is that no matter which the arithmetization method is, each expression must have a natural number associated and reciprocally, for any natural number it must be able to say if it has a correspondent formula in *S* or not.

3. By arithmetization, to each predicate of numbers (we can stop to the monadic predicate, P(x)) a natural number corresponds, by which this predicate can be indexed: $P_n(x)$, where *x* is a variable which has as values the natural numbers. Because the index (n) of predicate is a natural number, it results that it has sense to ask if the expression which is obtained by substitution of *x* with *n* is the expression of a predicate is a theorem in *S* or not, respectively, if the expression $P_n(n)$ is *demonstrable* inside of *S* or not. Demonstrability is an well defined property in an axiomatic system. An well formed expression (E) is demonstrable only if there is a suite (s) which contains a finite number of expressions which are already demonstrate or are axioms, so that *E* results by application of deduction rules of *S* to the elements of suite s. If the expression $P_n(n)$ *isn't* demonstrable inside of S, then, about number *n* we'll say that it is *gödelian*: G(n). In this way, it has defined a new predicate of numbers inside of *S*, with the means of that system:

(1) dem $G(x) =_{df} \sim$ dem $P_x(x)$

For example, let $P(x) \equiv (x + 1 = 2)$ be a predicate. If, by arithmetization, to this predicate number "1" is associated, then, it is demonstrable that $P_1(1) \equiv (1 + 1 = 2)$, namely, the number "1" doesn't satisfy the predicate G (it isn't *gödelian*). On the other hand, if the number which corresponds to our predicate (by another arithmetization method, for example) is "2", then $P_1(2)$ is not demonstrable in S, so that, number "2" is, in that case, gödelian, namely, it takes place G(2).

4. The predicate "G" must be a predicate of S, as predicate of numbers, because we supposed that in *S* all the predicates of numbers are definable. For that, by arithmetization, a natural number (g) corresponds to the predicate "G": $G_g(x)$. We may ask ourselves if it is demonstrable that "g" is gödelian or not, namely, if "~dem $G_g(g)$" takes place or not. Let's suppose that is demonstrable that "g" is gödelian. In this case, it's not demonstrable that "g" is gödelian, so, we fall into contradiction. If we suppose that it's not demonstrable that "g" is gödelian, then, it follows, in the hypothesis of *S*''s decidability, that it is demonstrable that "g" is not gödelian, namely, "~(~demG(g))" is demonstrable, which is equivalent with "demG(g)"; in this way, we are again in contradiction.[4] So, we are in the paradoxical situation that if the *S* system is consistent, we can't decide if the expression "$G_g(g)$" is a theorem or not, therefore, if *S* is consistent, it must be indecidable. It is not possible to avoid the paradox by the inclusion of Gödel's formula between the axioms of S, because inside of the system we can build another paradoxical formula. By those considerations, Gödel arrives to the conclusion that any logical consistent axiomatic system which is rich enough to contain the arithmetic, isn't decidable.

[4] Kneale W. & M.: *1975*, p. 356.

Let's show that Gödel result can be extended about any axiomatic system, with the consequence that all consistent axiomatic systems are indecidable. If we pay from attention to the arithmetization methods, we observe that the "numbers" which result by those play only the role of indexes of the expressions of S, namely, that they are individual constants. The important fact is that those individual constants belong to the domain of *S*: DS = $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, in order for the predicate which is definable inside *S* can be applicable on them. At the same time, the aim of the aritmetization methods is only to put into univocal correspondence any definable predicate form *S* (PS), with an element of DS, so that it would be possible to recognize which predicate is associated with a certain element of the domain. All these lead us to the conclusion that the aim of the arithmetization is to establish an *injective* function from the predicate field of the *S* system (PS) to the individual constant's domain of that system, namely: f: PS $\rightarrow$ DS, with this property $(P \neq Q) \supset (f(P) \neq f(Q))$.

Starting with these considerations, we can enterprise an important extension of Gödel's demonstration. Let S1 be an axiomatic system, with the individual constants domain DS1, so that all the possible predicates over DS1 are definable in S1 which forms the predicate field PS1. We'll follow the next steps:

1. an injective function f: PS1 $\rightarrow$ DS1 is defined, which associates to each predicate P(x) definable in S1 an element and only one from DS1 domain (not necessarily numbers). If f(P(x)) = a, we introduce the notation $P_a(x)$.

2. because the values of *f* belong to the domain DS1, we can ask if an expression like $P_a(a)$ is demonstrable or not inside S1. If such an expression isn't demonstrable, we'll say about his argument *a* that it satisfies a predicate "G", namely, inside the system S1 the predicate "Gx" is definable in that fashion:

(2) $Gx =_{df} \sim \text{dem } P_x(x)$

"G" is a predicate which takes values on the DS1 domain, so that, according to the precedent hypothesis, it must be definable in the S1 system and it belongs to the PS1 field. Consequently the *f* function is definable for "G" and there is only an element (g) in DS1 so that f(G) = g.

3. the problem if "g" satisfies the predicate "G" or not is arose. If $G_g(g)$ is demonstrable, it follows that $G_g(g)$ is not demonstrable and if we suppose that it is not demonstrable $G_g(g)$, we obtain that this expression is demonstrable in S1, so that, we arrive at a contradiction and at the same consequence that the axiomatic system S1, if it is consistent, then it is indecidable.

At this time, it's no constrain on S1 which imposes that his domain contains natural numbers, but, in this paradoxical situation any axiomatic system can be. Of course, the conclusion is exciting: in any axiomatic system we may build a gödelian expression, with the consequence that no such system can be logical consistent and decidable.

On the other hand, there are the demonstrations that at least some of the consistent axiomatic systems are decidable, so, there is a conflict between those demonstration and former generalized form of Gödel's theorem. Of course, in Gödel's demonstration there must be errors and the simplest is that this demonstration doesn't obey the elementary rule that after we define a new entity, we must demonstrate an *existence theorem* for it, which shows that the entity is not contradictory. For example, in Euclidean geometry, we could define the predicate "triangular quadrulater" like the plane geometric figure with four sides and three angles, when we could obtain many strange theorems about such a figure, but which must be rejected because the defined predicate is self-contradictory.

We'll argue that the predicate "gödelian", which plays a crucial role in Gödel's demonstration is self-contradictory, namely, it is a null concept, so that, the demonstration of Gödel's theorem is fallacious because it is founded on a self-contradictory term. If the domain of a system *S* is **DS** = $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, then, the predicates which can be defined inside of *S* can be recognized in *extensional* fashion, namely, by the criterion of demonstrability of the formulas which could be built with their help. All those predicate are presented in the following table:

	0	1	2	..	n
0				..	
1				..	
2				..	
3				..	
..	..	..	..	..	..
m				..	

where by "1" we symbolize that the expression $p_i a_j$ is demonstrable in S, and by "0", that the formula "$\sim p_i a_j$" is demonstrable in S.

We observe that the number of possible predicates in *S* is greater than the number of the elements of the domain DS, namely, if the domain contains *n* elements, then, the number of the predicates is m = 2^n. On the other hand, *m* is the number of the predicates which can be extensionally distinguished inside the system, without the predicates which can be intensionally distinguished. This is an important fact about Gödel's demonstration, because, the new predicate "G" can't be extensionally distinguished from the other predicates of the system, about which we have supposed that they are all definable predicates inside of S. If we rest at the extensional predicates,[5] in the case in which *n* is finite, it is impossible to define an *injective* function from the predicate field to the arguments domain, in conformity with Gödel's demonstration. The injectivity property is essential, because, in an other way, "g" couldn't be distinguished from other elements of DS, so we couldn't recognize the predicate "gödelian". Besides, without injectivity, it is not possible to recognize the formula which corresponds to a certain element of DS.

[5] these considerations are more valuable as we take into attention the *expressions* which are possible in S, because their number is greater than the number of possible predicates.

Consequently, for the system with a finite domain, the "arithmetization" is not possible and Gödel's demonstration is fallacious.

Let's see now if Gödel's demonstration is valid for the systems with an infinite domain, namely, for the case when $n = \infty$. At this time, the number of the predicates which can be extensionally distinguished is $m = 2^{\infty}$. For the scholars who accept Cantor's diagonal reasoning, any discussion about Gödel's argument must be finished, because, according to the diagonal reasoning $2^{\infty} > \infty$, so that, *f* can't be injective in this case. But the fallacious character of Gödel's demonstration doesn't depend on the correctness of Cantor's reasoning.

Let's suppose that "$2^{\infty} > \infty$" is false. Obviously, in any axiomatic system the predicate "p_0" is definable, about which it can demonstrate that it isn't applicable to any argument, namely, for any *x*, "dem $\sim p_0(x)$" takes place, with the consequence that $(x)(\sim \text{dem } p_0(x))$. Such a predicate is, for example, "$Px \ \& \ \overline{P}x$". Let's suppose now that the function *f* associates to this predicate an element of the domain which we note with a_0. From the definition of the "gödelian"(G) predicate and from the status of p_0, $G(a_0)$ results.

Another predicate which is definable inside *S* is the predicate demonstrable only for a_0. Let's note that predicate with "p_1". Because *f* is an injective function, another element of DS corresponds to p_1, different from a_0, let's say a_1, namely, $f(p_1) = a_1$. From the previous definition of the predicate p_1, it results that "$\sim$ dem $p_1(a_1)$", therefore, $G(a_1)$ takes place.

Inside system *S* the predicate p_2 which is demonstrable only for the arguments a_0 and a_1 can be also defined, his negation being true for another argument. At this time, we note with a_2 the value of *f* for the new predicate: $f(p_2) = a_2$, which, because *f* is injective, must be different both a_0 and a_1. In conformity with previous considerations, "$\sim$dem $p_2(a_2)$" takes place, respectively, $G(a_2)$ takes place. This reasoning can be continued until we cross all arguments of the domain, so that, for any element *x* of DS, it's demonstrable that it satisfies the predicate "G": $(x)G(x)$. We can rise the objection that the domain is infinite and the demonstration can't be effectively built. But, we obtain the same result by a complete induction:

(3) $(G(a_0) \ \& \ (G(a_k) \supset G(a_{k+1}))) \supset (x)G(x)$

The demonstration is immediate. We have already seen that $G(a_0)$ takes place. Let's suppose that $G(a_k)$. Let p_k be the predicate which is demonstrable for the arguments $a_0, ..., a_k$ and undemonstrable for any other arguments. A new element of the domain, a_{k+1}, must correspond to the function *f*, because *f* is injective. According to his definition, *f* isn't applicable to a_{k+1}, so that a_{k+1} is gödelian, in this way we have proved that G is applicable for any elements of DS:

(4) $(x)(G(x))$

On the other hand, inside of the system *S* a predicate p_z which is demonstrable about all elements of the system's domain is definable. For example, such a predicate is "$Px \vee \overline{P}x$". Let's note the value of function *f* for this predicate by a_z: $f(p_z) = a_z$, where $a_z \in$ DS. Of course, in conformity with the previous considerations, "dem $p_z(a_z)$" takes place, so that, it results that $\sim G(a_z)$, namely, there is at least one argument in DS which isn't gödelian:

(5) $(\exists x)(\overline{G}(x))$

Obviously, this result is in contradiction to (4). By consequence, no matter if we accept the Cantor's transfinite numbers or not, the predicate "gödelian" is contradictory, so that it can't be defined in an axiomatic system.[6] If this predicate can't be defined in any consistent axiomatic system, it follows that we can't ask if the number "g" satisfies it or not, therefore, Gödel's theorem and the "paradox" which is generated by it are completely harmless. They doesn't succeed to limit the formalism and the logicism, so that, the logicism remains a valuable option for the foundation of mathematics, even if it must be perfected.

BIBLIOGRAPHY

1. Becker O.: *Măreţia şi limitele gândirii matematice*, Ed. Ştiinţifică, Bucharest, 1968.
2. Dumitriu A: *Soluţia paradoxelor logico-matematice*, Ed. Ştiinţifică, Bucharest, 1966.
3. Enescu Gh.: *Teoria sistemelor logice*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucharest, 1976.
4. Gödel K.: "Asupra propoziţiilor formal nedecidabile din *Principia mathematica* şi din sistemele înrudite", O. Becker: *Fundamentele matematicii*, Ed. Ştiinţifică, Bucharest, 1968, p. 433.
5. Kneale W. & M.: *Dezvoltarea logicii*, II, Dacia, Cluj, 1975.
6. Nariţa I.: "Caracterul paradoxal al raţionamentelor inductive amplificatoare", *Analele Universităţii din Timişoara*, Philosophy, IV, 1992, p. 45.
7. Pataut F.: *Realism, decidabilitate şi trecut*, Ed. TREI, Bucharest, 1999.

[6] another important argument against the indecidability theorem has formulated by Becker O. We saw that if we suppose that the system is consistent, it results that inside him we can build Gödel's formula which can't be demonstrated. So, we can admit that *S* = consistent ⊃ FG, where 'FG' is Gödel's formula. On the other hand, the consistence of system is demonstrable, so, by *modus ponens*, results that Gödel's formula can be demonstrated. If the system isn't consistent, the formula is demonstrable because in such a system any formula is demonstrable. It follows that Gödel's formula is demonstrable in any conditions.

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

SUR L'INFINI
(le programme de HILBERT – [1925])

MARCEL BODEA

« l'élucidation définitive de la nature de l'infini dépasse largement les intérêts d'une discipline scientifique particulière, et elle est devenue indispensable à l'honneur même de l'esprit umain»

David HILBERT[1]

Abstract
The conception of intuition in mathematics is prominent in early twentieth-century work on foundations of mathematics. The conception of mathematical intuition is partly based on Hilbert's ideas about the methods of proof theory, a conception of intuitive evidence closer to the finitary method of Hilbert. Hilbert claimed some kind of evidence for finitist mathematics. Hilbert claimed intuitive evidence for individual instances of induction where the predicates involved are of the right kind, in practice primitive recursive. The objects of such intuition are abstract objects. This is perhaps clearest in Hilbert's *conception* of mathematics and logic, in Hilbert's distinction between intuitive and formal mathematics.

Les mathématiques d'aujourd'hui reposent entièrement sur une base axiomatique. Elles se fondent sur un système de symboles sans rapport direct avec la réalité et soumis à ses propres règles, dont le trait dominant est une entière soumission à la logique, elle aussi formalisée, symbolisée. Cette abstraction ne signifie pas, cependant que l'imagination a perdu ses droits.

L' « épisode » mathématique : **Sur l'infini** [David HILBERT – 1925] est situé entre la crise de la théorie des ensembles, qui survint en 1902, et la découverte du théorème de Gödel, dans les années 1930 - 1931. Les grands personnages d'époque –pour le thème - sont : Dedekind, Peano, Cantor, Frege, Russell, Poincaré, Hilbert, Gödel. Kurt Gödel était un disciple de David Hilbert et il travaillait sur un des grands projets du maître : démontrer la cohérence des axiomes de l'arithmétique pour établir une fois pour toutes qu'au moins cette branche des mathématiques est à jamais exempte de toute contradiction interne. Hilbert se fondait sur la formulation de l'arithmétique et de ses propositions par des signes et des symboles. Il considérait l'ensemble de toutes les propositions correctement formées dans le langage formel de l'arithmétique, en y incluant les opérations courantes : addition,

[1] p.222 (toutes les notes de bas de page [p.(…)]sont d'article de David Hilbert « Sur l'infini », trad. fr., in LARGEAULT, J. (ed.), *Logique mathématique : textes.* A. Colin, 1972)

soustraction, multiplication division avec reste entier et exponentiation. Tous les axiomes nécessaires y figuraient en bonne place. Le problème qu'il s'agissait alors de résoudre était de montrer que toute proposition de l'ensemble pouvait se voir en principe attribuer une valeur de vérité unique au moyen d'une démonstration, c'est-à-dire d'une chaîne finie d'implications logiques prenant sa source dans les axiomes.

David HILBERT (1862 – 1943) a dominé l'école mathématique allemande dans la première moitié du XX^{e} siècle. Il reste aussi un de plus grands mathématiciens du monde de tous les temps.

Son 'Credo Mathématique' a été :

« la thèse de la résolubilité de tout problème mathématique. C'est une thèse qui reflète notre conviction à tous. »[2]

ou encore :

«tout problème mathématique bien déterminé est résoluble ».[3]

A partir de 1890, Hilbert a commencé à développer sa conception formaliste des mathématiques qui a été présentée dans son programme mathématique de 1925.

Dans l'esprit de son étude, ***Sur l'infini***, D. Hilbert, caractérise ainsi les mathématiques :

« En ce qui concerne particulièrement les mathématiques, l'objet de notre étude sera donc les signes concrets eux-mêmes dont nous savons, du point de vue que nous avons adopté, distinguer et reconnaître la forme. »[4]

Le but de son article rend nécessaire pour D. Hilbert de mettre l'accent sur l'arithmétique pour ses avantages évidents. (La non contradiction de l'arithmétique a constitué une autre préoccupation mathématique majeure pour Hilbert.) Il est intéressant de se rapporter :

«…à la nature et aux méthodes de l'arithmétique finitiste qui est familière à tout le monde. Celle-ci s'édifie uniquement par des constructions numériques au moyen de considérations intuitives à contenu. »[5]

D. Hilbert toutefois précise :

« Mais la science mathématique ne consiste pas simplement en équations entre nombres et elle ne s'y réduit pas. »[6]

Pour D. Hilbert, le problème de l'infini est lié à celui de démontrer la non-contradiction (la consistance) des mathématiques et ces deux problèmes étaient associés dans la pensée de Hilbert, Hilbert qui évoque la possibilité d'employer la langue symbolique de nouvelle logique à transformer le problème de la consistance en un problème combinatoire. La différence entre l'intuitionnisme et le formalisme sur le plan épistémologique est que les démonstrations de consistance donnent un sens aux mathématiques non-constructives, tandis que pour les intuitionnistes ces mathématiques restent absolument dénuées de sens. La théorie hilbertienne de la démonstration c'est que l'étude des fondements comporte la recherche de nouveaux axiomes. Le plan d'ensemble s'agit d'un programme d'élimination qui doit aboutir à faire place des problèmes de fondement, absorbés dans la mathématique elle-même.

[2] p.236
[3] p.237
[4] p.228
[5] p.228
[6] p.228

Au-delà de la caractérisation ci-dessus, dans une perspective plus large, les mathématiques ne sont ni des idées, ni des concepts qui peuvent être abordés d'une manière 'isolée', mais elles sont des collections de 'propositions mathématiques', propositions qui contiennent des concepts et des idées abstraites. Cet aspect est très important. Mais il y a aussi des propositions mathématiques qui contiennent des éléments 'concrets' comme sont les nombres naturels.

« Dans cette arithmétique [*« l'arithmétique intuitive »* (n.n.)] *les formules n'étaient utilisées que pour un but de communication, les lettres désignaient des chiffres et une équation servait à communiquer l'identité de deux signes. »*[7]

D'autre part, quand on passe de 'l'arithmétique à contenu' à l'algèbre formelle, on considère les symboles ou les signes des opérations détachés de leur sens à contenu. Mais dans une formule générale qui contient la variable 'x', 'x' peut être substitué par un nombre naturel (ou entier, etc.) et on obtient une infinité de propositions 'concrètes'.

« Au contraire en algèbre nous considérons les expressions composées de lettres comme étant en soi des formes indépendantes et qui formalisent les théorèmes à contenu de l'arithmétique. »[8]

En plus, dans une formule générale qui contient la variable 'x', 'x' peut être substitué par un quelconque objet mathématique :

« A la place des propositions portant sur les chiffres apparaissent des formules qui sont à leur tour l'objet d'une saisie intuitive ; et à la place des démonstrations arithmétiques à contenu apparaît la déduction d'une formule à partir d'une autre formule suivant certaines règles ; »[9]

Les mathématiciens ont élaboré depuis des siècles des propositions qui portent sur le concept d'infini (le concept qui, premièrement, intéresse ici). Dans ce cadre, la question est : Qu'est-ce que l'infini pour les mathématiques ? Les mathématiciens ont-ils répondu à cette question ? Au-delà du niveau des réflexions générales intuitives dans la réalité quotidienne sur l'infini et au-delà des considérations de type métaphysique sur l'infini, il en est d'autres beaucoup plus scientifiques.

« Plus qu'aucune autre question, celle de l'infini a depuis toujours tourmenté la <u>sensibilité</u> des hommes; plus qu'aucune autre <u>idée</u>, celle de l'infini a sollicité et fécondé leur intelligence; plus qu'aucun autre <u>concept</u>, celui de l'infini requiert d'être <u>élucidé</u>. »[10]

Après Hilbert, parmi les propositions mathématiques, les unes possèdent un sens intuitif, autrement dit concret, tandis que les autres non.[11] Les propositions mathématiques portent sur des «objets mathématiques». Donc, on doit mentionner encore une fois que, dans la sémantique des propositions mathématiques il y a des concepts mathématiques, en

---

[7] p.232
[8] p.232
[9] p.232
[10] p.222
[11] Parmi les dernières propositions sont celles qui font intervenir le transfini. L'espoir de Hilbert est que ces propositions sont éliminables avec le symbole « ε » et le premier théorème – « ε », car en éliminant les quanteurs [*il existe* ou *pour tout*] en termes de ce symbole, on ramène des assertions générales, portant sur 'tous les objets' à des assertions sur quelques objets particuliers. [Le premier théorème- « ε » dit que si une formule sans « ε » est dérivable à partir d'axiomes sans « ε », alors « ε » est éliminable de sa démonstration.

général, bien précisés. Pour la compréhension de ces concepts mathématiques, quelquefois, sont proposées des analogies intuitives qui correspondent aux concepts mathématiques. “Mathématicien est celui qui est capable de développer des analogies”, affirmait le grand mathématicien polonais Stéfan Banach. Mais les intuitions et les analogies peuvent devenir la source d’ambiguïtés et d’erreurs. Ces limitations devaient être précisées. Par le caractère spécifique des propositions mathématiques, les concepts mathématiques se soustraient, en général, aux connotations métaphysiques ambiguës ou imprécises (ainsi qu’à certaines critiques possibles, comme est, par exemple, celle de type de Carnap, d’un aspect positiviste). Doivent être prises certaines précautions pour la légitimité d’une convention sur l’introduction d’un concept. Un exemple dans ce sens, est le concept mathématique de «***l’infini***», qui ne tend, mathématiquement parlant, vers aucune signification métaphysique. (Un exemple de concept métaphysique de l’infini se trouve présenté dans la doctrine philosophique transcendantale kantienne où l’infini est simplement une des idées régulatrices de ‘pure raison’, qui dépasse toute expérience et qui comprend le concret réel de manière à ce qu’il forme une totalité.) De ce point de vue, D. Hilbert a précisé pour les mathématiques:

« Il est de fait que la littérature mathématique est submergée de lieux communs saugrenus et de non-sens qui pour la plupart sont engendrés par l’infini. »[12]

et aussi pour les sciences naturelles (l’astronomie, la physique, etc.) par rapport à la métaphysique :

« [sur l’infiniment grand] *C’est encore la science moderne […] qui a remis la question sur le tapis et qui a cherché à la résoudre, non pas avec les moyens insuffisants de la spéculation métaphysique, mais par des arguments étayés par l’expérience et par l’application des lois physiques. »*[13]

Pourtant, l’intérêt même scientifique et même philosophique pour le concept de l’infini, peut être justifié :

« Cependant il se pourrait très bien que l’infini ait une place légitime ***dans notre pensée*** *et qu’il y assume le rôle d’un concept indispensable. »*[14]

On donne ici un exemple mathématique - topologique (géométrique – parce que la géométrie est, peut être, plus intuitive que l’arithmétique) seulement pour servir de support intuitif qui peut accompagner les abstractions mathématiques –qui est ici ‘la dimension - nombre entier’- et facilite la compréhension, et qui oriente l’intuition des conséquences dans le plan abstrait - mathématique.

Caractérisons maintenant, sommairement et intuitivement, la dimension topologique. On appellera “coupure” tout ensemble de points (figure géométrique) qui divise l’espace mathématique donné en deux régions complètement séparées. Géométrique, pour une droite infinie -espace unidimensionnel continu- un point arbitraire de la droite est une coupure, dans le sens que, faisant abstraction de ce point frontière (d ‘arrêt), on ne peut pas passer d’une partie a l’autre de la droite, si on prend en considération seulement son uni dimensionnalité. Pour une courbe unidimensionnelle continue fermée, une coupure est représentée par deux points frontière distincts, qui découpent la courbe en deux parties, si on considère seulement le cas unidimensionnel. Et dans un cas et dans l’autre, la solution

[12] p.221
[13] p.223
[14] p.223

serait "la sortie" dans un espace bidimensionnel. De même, en considérant un plan et une coupure représentée par une courbe frontière fermée, par laquelle le passage est interdit, l'espace continu bidimensionnel plan est séparé en deux parties distinctes et disjointes. Ici aussi, la solution de passer d'une partie à l'autre sans toucher la frontière est de "sortir" dans une troisième dimension. De même, si on a une sphère fermée dans un espace continu tridimensionnel, le passage vers l'intérieur de la sphère (ou de la sphère vers l'extérieur) sans toucher la surface de celle-ci, peut se faire de nouveau par la "sortie" dans une quatrième dimension etc. Intuitivement, sous la forme d'une image métaphorique, il s'agit d'un "contournement" de l'objet frontière par le "tunnel" ou par le "pont" d'une dimension supplémentaire. Un espace continu a, ainsi, la dimension topologique n, s'il peut être sépare par des "coupures" (toujours des espaces continus) de dimension "n-1" (traditionnellement : le point est la frontière d'un segment, la droite celle d'une surface, le plan celle d'un espace). C'est l'aspect qui compte du point de vue intuitif - mathématique de la géométrie.

C'est un effort de rendre intuitive la dimension topologique par analogie avec la dimension au sens intuitif euclidienne. Mais, ce que veut dire cet exemple, est que nous n'avons pas d'analogies intuitives qui correspondent au concept mathématique d'espace (ou de dimension) quadri-dimensionnel. Notre intuition est bloquée. Tout est familier au niveau intuitif jusqu'à ce qu'on arrive à la quatrième dimension. On peut dire que se retrouve ici le thème kantien des limites des intuitions pures de la sensibilité (à l'espace euclidien tridimensionnel).

Un autre exemple mathématique significatif, dans lequel l'intuition ne joue pas quelque rôle, sont les fonctions continues qui n'ont de tangente en aucun point de leur graphique. Une fonction continue sans dérivée est un exemple de "monstre mathématique" de la fin du siècle passé. Lié à cet aspect, la géométrie fractale est un autre 'chapitre' mathématique non intuitif : on appelle *fractale* un objet (une forme) dont la géométrie peut être décrite par une dimension non entière ou fractionnaire (la dimension fractale). Très suggestif, après le mathématicien Benoît Mandelbrot : « Le nom de Georg Cantor domine la préhistoire de la géométrie fractale… » et aussi « […] irrésistiblement fait penser à une célèbre construction mathématique, dont le résultat est généralement appelé ensemble de Cantor… »[15]

Ces exemples purement mathématiques, ont été donnés seulement pour signaler les limites des intuitions dans les mathématiques.

L'arithmétique et la géométrie ont été de tout temps et restent encore des disciplines mathématiques fondamentales. Toutes les deux, opèrent avec le concept d'infini : ensemble infini des nombres, ensemble infini des dimensions, ensemble infini des points, le caractère infini de l'espace, etc. D. Hilbert donne une présentation élémentaire pour une interprétation *« originale »* du concept de l'infini dans la géométrie et dans l'algèbre, offert par *« la méthode des **éléments idéaux** »*[16].

Les mathématiques sont des théories qui quantifient.

Le nombre –comme d'ailleurs une figure géométrique- est une certaine forme d'abstraction mathématique.

On a dit que **le concept mathématique de «*l'infini*»**, n'a ou, au moins, ne doit avoir, aucune signification métaphysique. Il existe le risque pour les mathématiciens de

[15] Benoît Mandelbrot – Les objets fractales, Flammarion, 1995, p. 52
[16] p.224

travailler sur des objets dont la nature n'a pas été précisée. Beaucoup de concepts mathématiques, comme est d'ailleurs le concept d'infini, ont des difficultés intrinsèques. Un autre «risque» dans ce sens (le sens d'être imprécis) qui porte à la logique, sont les assertions avec un caractère général, assertions qui portent 'sur tous les objets' où l'expression 'pour tout' porte sur les individus d'un domaine infini nombreux. Quel est le risque dans ce cas? Comment la logique classique, est-elle impliquée ou affectée?

« Il ne nous a fourvoyés que parce que nous avions admis des concepts abstraits arbitrairement formés, notamment des concepts qui ont pour extension un nombre infini d'objets, et qu'ensuite nous l'avons appliqué illégitimement, en manquant à tenir compte des conditions préalables nécessaires à son applicabilité. »[17]

Les propositions dans lesquelles les expressions 'pour tout' et 'il existe' portent sur les individus d'un domaine infini sont appelées des «*'propositions transfinies'*». Sur ces aspects on verra des détails un peu plus tard. Mais, dans ce cas, qu'est-ce qu'une 'proposition finitiste' ? Dans une première et large caractérisation, une *'proposition finitiste'* est une proposition qui par des moyens mathématiques a un sens concret mathématique, c'est-à-dire, principalement, a un sens opérationnel mathématique (des nombres, des termes, des formules, des relations, etc.). Plus large, D. Hilbert parle même d'une 'attitude finitiste' :

« [...] l'attitude finitiste de la pensée, qui dans la construction de l'arithmétique a servi à dériver les équations entre nombres. »[18]

D. Hilbert a espéré que les propositions transfinies étaient éliminables et, en plus, q'un programme plus général d'élimination et, aussi, des problèmes de fondement, doivent être assimilés par les mathématiques elles-mêmes. Si l'élimination du transfini est effectivement possible ou, au moins, si sa possibilité de principe d'être éliminé est démontrée, on peut dire que l'infini actuel, comme l'infini potentiel, donc *l'infini* dans son sens classique, est une simple manière de parler.

Aristote a fait premièrement, une distinction fondamentale –distinction qui reste encore aujourd'hui- entre deux types d'infinis : ***l'infini potentiel*** ou infini en puissance, et ***l'infini actuel***, ou infini en acte. L'infini potentiel corresponde à une certaine nécessité mathématique. Par exemple, l'addition itérative (ou/et la multiplication) des nombres entiers entre eux ; ou, autre exemple, l'infini inhérent au principe d'induction mathématique.[19] L'infini potentiel par l' addition ou par la multiplication, est 'un infiniment grand'. Mais, une grandeur peut également être un infini potentiel par division. L'infini potentiel par division est 'un infiniment petit'. Cet infiniment petit a conduit aux XVII[e] et XVIII[e] siècles au calcul infinitésimal. Aussi dans l'analyse mathématique actuelle, l'infiniment grand et l'infiniment petit sont, chacun, comme des concepts 'à la limite', un infini potentiel. On peut dire, plus généralement, que le calcul infinitésimal évite la question de l'infini actuel. Mais qu'est-ce que c'est un infini actuel ?

De façon différente d'un infini potentiel, un infini existant effectivement est un infini actuel, en acte. Un infini actuel est une sorte de 'totalité donnée'. L'ensemble des nombres naturels, l'ensemble des nombres réels, etc., sont, chacun, un infini actuel. Une

---

[16] p.228
[18] p.229
[19] D. Hilbert n'accepte pas l'idée de H. Poincaré que le principe d'induction est inhérent à notre nature intellectuelle.

autre exemple, en logique, quand on utilise l'expression 'pour tout', cet expression porte sur les individus pris dans un tout, dans un domaine qui peut être infiniment nombreux, dans une 'totalité donnée'. C'est une *supposition d'existence*, une supposition qu' 'il existe' une telle totalité. Aristote soutient la thèse selon laquelle aucun objet réel ne peut être infini que de façon potentielle, la thèse que l'infini actuel est seulement une construction de l'esprit exprimée en langage, c'est-à-dire, est une 'simple manière de parler'.

Plus tard, Leibniz a élaboré une conception métaphysique des infiniment petits intitulés 'monades'. Leibniz est considéré comme un des pères du calcul infinitésimal. Dans les mathématiques, Leibniz a perçu les infiniment petits comme des 'fictions utiles pour calcul' qu'il appelle aussi 'façon de parler'. D'autre part, attaché à l'idée d'infini actuel sur un plan métaphysique, Leibniz reste prudent pour ce qui est des mathématiques.

Encore plus tard, D. Hilbert dira :

« Dans les processus de passage à la limite du calcul infinitésimal, l'infini au sens de l'infiniment grand ou de l'infiniment petit s'est révélé constituer une simple manière de parler: de même nous devrons reconnaître dans l'infini au sens de totalité infinie, partout où il joue encore un rôle dans les inférences, quelque chose de purement fictif. »[20]

Grâce à la notion de limite, les mathématiciens ont amélioré la technique du calcul et ont mis au point une théorie qui permet d'éviter de parler d'infiniment petit : la théorie du calcul intégral. Dans cette théorie, au lieu de dire qu'une grandeur est infiniment petite, on dira qu'elle est la limite d'une suite de nombres de plus en plus petits.

Les lois de la logique classique doivent être appliquées seulement aux propositions finitistes. La présupposition est que la logique classique comme une logique à contenu ne s'applique qu'à des propositions à contenu. Au moins une remarque est nécessaire pour préciser la position de D. Hilbert dans cette question : quel est le rapport entre logique classique comme raisonnement logique à contenu, et la réalité ?

« [N'est-il pas plutôt évident que]…[…]…le raisonnement logique à contenu nous a-t-il jamais trompés ou abandonnés quand nous l'appliquons à des objets ou à des processus réels ? Non point, le raisonnement logique à contenu est indispensable. »[21]

Pour la logique, après Hilbert, les *'propositions finitistes'* sont des propositions sans variables d'individus libres ou liées -les objets qui figurent comme arguments sont des chiffres- et avec symboles de prédicat ou de fonction récursifs ou décidables.

Les propositions transfinies se soustraient à la logique classique par leur pauvreté de sens concret, par leur formalisation. Les objets transfinis n'ont pas de sens, n'ont pas d'interprétation. On leur applique des règles mécaniques d'inférence. Elles sont gouvernées par des règles de type algorithmique. Un algorithme, c'est une sorte de déterminisme mathématique 'pur', étant une suite d'opérations qui convergent vers un résultat anticipé et donc prédéterminé, les formules ultérieures sont parfaitement prévisibles.

Mais toutes les propositions mathématiques sont formelles. Alors, qu'est-ce que peut signifier une proposition mathématique à contenu ? D'abord, quelques précisions sont nécessaires. Premièrement, le problème de la signification épistémologique du rapport : théorie mathématique - modèle de la réalité (physique). Les mathématiques sont une théorie formelle qui *quantifie* et qui trouve des *mesures* dans 'la réalité'. Elles sont des

[20] p.221
[21] p.228

outils d'une grande force théorique et opérationnelle scientifique. On doit affirmer le caractère descriptif des mathématiques en rapport avec la Nature. A la limite, les MATHEMATIQUES sont une *description* en détails et globale, tandis que la PHYSIQUE –par exemple- est une *explication* en détails et globale de la Nature. Les mathématiques ne procurent pas pour la science la compréhension –qui est la capacité de comprendre le sens, la signification globale d'une explication- mais elle procurent de la précision et de la clarté logique. Si quelque chose a besoin d'une clarification, on cherche celle-ci dans le raisonnement.

Les mathématiques sont des symboles qui peuvent être reliés sous forme d'une description mathématique –qui est une transcription abstraite - des phénomènes physiques connus par l'expérience, expérience qui est le résultat de toute une série de mesures et de vérifications. Mais tous les symboles mathématiques, même ceux appelés 'concrets', sont, en fait, très abstraits :

« ...la forme se laisse reconnaître indépendamment du moment et du lieu ainsi que des conditions particulières de leur production et des légères différences dans leur tracé... »[22]

Pour la physique, les symboles mathématiques pourront devenir des objets avec du sens dans la réalité concrète. Plus généralement, pour une science, les symboles mathématiques « deviennent » 'objets réels' par la réduction de leur degré d'abstraction. Toutes propositions mathématiques 'à contenu' forment une classe d'équivalence par rapport à la relation de correspondance avec une réalité scientifique concrète. On doit préciser que les phénomènes physiques, les objets physique ne s'identifient pas aux objets mathématiques qui les 'régissent', toujours comme les lois physiques ne s'identifient pas aux lois logiques, par exemple. Il semble que pour D. Hilbert il n'y a pas, seulement, que des sciences du concret. Même la logique, d'après D. Hilbert, est conditionnée, dans son applicabilité, par un 'contenu', par un 'concret', préalable :

« La condition préalable de l'application des inférences logiques et de l' effectuation d'opérations logiques est l'existence d'un donné dans la perception : à savoir l'existence de certains objets concrets extra-logiques qui en tant que sensations immédiates précèdent toute pensée. »[23]

Donc, dans le sens où la Nature est écrite en langage mathématique, les symboles, les notions, les constructions mathématiques qui ne peuvent être posés en correspondance -par une certaine science- avec la nature, sont transfinies. Toutefois, dans les mathématiques et dans toutes sciences formelles, tous les symboles, les notions, les constructions qui sont ou peuvent être récursives, sont finitistes. Aussi tous les symboles, les notions, les constructions qui sont compris dans des règles de calcul, dans des algorithmes et dans des démonstrations sont finitistes. Pour D. Hilbert une démonstration représente une dérivation formelle :

« [[p.2] *] à la place des démonstrations arithmétiques à contenu apparaît la déduction d'une formule à partir d'une autre formule suivant certaines règles ; »*[24]

Une démonstration est une pure déduction partant d'axiomes et, d'après lui, elle a effectivement une 'image mathématique' (!) :

---

[22] p.217 – Hilbert 1922
[23] p.228
[24] p.232

« Une démonstration formelle constitue un objet concret visualisable, exactement comme un chiffre. »[25]

Un des objectifs d'une démonstration, est de remplacer les inférences qui utilisent l'infini, par des processus finis :

« De même que les opérations portant sur l'infiniment petit ont été remplacées par des processus qui accomplissent la même fin et conduisent à des rapports formels aussi élégants tout en se situant à l' intérieur de la sphère du fini, les inférences qui utilisent l'infini sont à remplacer par des processus finis qui accompliront exactement la même fin c'est-à-dire permettront les mêmes démarches dans les démonstrations et les mêmes méthodes d'obtention des formules et des théorèmes. »[26]

Un autre objectif d'une démonstration comme une dérivation formelle est d'assurer une sécurité méthodologique pour le chaîne des inférences, sécurité à laquelle ne peuvent pas aboutir les paradoxes et les contradictions ; un exemple dans ce sens étant l'arithmétique élémentaire.

« Il est indispensable de donner partout aux inférences la sûreté qu'elles ont en arithmétique élémentaire, théorie à l'abri du doute et dans laquelle contradictions et paradoxes, s'il en survient, ne sont imputables qu'à notre manque de soin. »[27]

Mais le programme de Hilbert n'est pas réalisable puisque le prédicat 'être démontrable' n'est pas finitiste ou récursif, après que le théorème d'incomplétude de Gödel (1931) a montré cela même pour un système tel que celui de l'arithmétique élémentaire.

Le concept mathématique de l'infini est présent notamment dans l'analyse mathématique :

« [...] l'Analyse, cette construction si élégante et si différenciée de la science mathématique. Vous savez quel rôle déterminant l'infini y joue et que l'Analyse est une sorte d'extraordinaire symphonie de l'infini. »[28]

Mais, d'après D. Hilbert, même si :

« [...] aujourd'hui l'Analyse constitue dans son propre plan un guide infaillible et en même temps un instrument pratique pour le maniement de l'infini. »[29] ,
l'analyse mathématiques toute seule ne conduit pas à saisir la nature profonde de l'infini.

D. Hilbert a considéré que :

« Waierstrass a comblé les lacunes que comportait encore le calcul différentiel et intégral, en le purifiant de toutes les idées imprécises sur les quantités infinitésimales... »[30]

Mais avec toute les considérations ci-dessus, après D. Hilbert :

« ...le fondement donné par Weierstrass au calcul infinitésimal ne représente pas la clôture de la discussion des fondements de l'analyse. »[31]
et donc, la question de statut de l'infini en mathématique, reste encore ouverte :

[25] p.236
[26] p.221
[27] p.228
[28] p.224
[29] p.225
[30] p.220
[31] p.221

« La raison en est que la signification de l'infini pour les mathématiques n'a pas encore été exhaustivement définie. »[32]

En mathématique, la dualité fini - infini est une source des solutions théoriques pour les problèmes abordés dans leurs fondements. C'est aussi le cas de Weierstrass quand il a essayé résoudre le problème de l'infini mathématique dans l'analyse :

« Weierstrass a éliminé de l'Analyse l'infiniment petit et l'infiniment grand puisque les propositions portant sur ces objets ont été réduites par lui à l'énoncé de rapports entre des grandeurs finies. »[33]

On peut préciser que pour l'analyse mathématiques les concepts mathématiques de l'infiniment grand et de l'infiniment petit sont des concepts 'à la limite' :

« entité en devenir, en train de naître ou de se produire, en d'autres termes à de ***l'infini potentiel****. »*[34]

Mais Weierstrass, a-t-il réussi ? L'opinion de D. Hilbert est que non:

« Mais l'infini continue d'être présent : il prend la forme de suites infinies de nombres qui définissent les nombres réels, ou bien il est sous-jacent à la notion de système des nombres réels conçu comme une totalité achevée et fermée. »[35]

Bien que dans son article 'Sur l'infini' l'intérêt principal est l'élucidation du concept d'infini, le but vers lequel D. Hilbert a orienté son analyse logico -mathématique est un but méthodologique -mathématique :

« Tel est l'objet de ma théorie. Elle a pour dessein d'assurer la sécurité définitive de la méthode mathématique... »[36]

De cette façon, l'infini, arrive à avoir des implications méthodologiques visant le nombre d'inférences d'une démonstration :

« ...l'intention d'y mettre une condition restrictive, l'exigence que dans une mathématique rigoureuse un nombre fini seulement d'inférences est admis au cours d'une démonstration : comme si quelqu'un avait jamais effectué un nombre infini d'inférences ! »[37]

Tout d'abord, D. Hilbert fait une élucidation de ce qu'est l'infini dans la réalité physique. Sa conclusion :

« [...] dans l'univers physique l'infini ne se rencontre nulle part, quelles que soient les expériences, les observations ou la discipline scientifique mises en œuvre. »[38]

Premièrement, ce qui retient l'intérêt est l'aspect de l'uniformité et de la continuité de la matière. Mais il y a une divisibilité physique, il y a des entités réelles physiques (des particules élémentaires), etc.

« Ce qui se dégage de tout cela en tout cas, c'est qu'un continu homogène qui serait divisible indéfiniment et réaliserait l'infini en petitesse, ne se rencontre nulle part

[32] p.221
[33] p.221
[34] p.225
[35] p.221
[36] p.221
[37] p.221
[38] p.228

dans la nature. La divisibilité à l'infini d'un continu est une opération qui n'existe que dans la pensée, ce n'est qu'une idée que réfutent nos observations de la nature… »[39]

La perspective complémentaire à celle ci-dessus, sur l'infini, vise l'infiniment grand.

« Le deuxième point sur lequel la question de l'infini dans la nature se présente à nous, est la considération de l'univers en tant que totalité. Ici il nous faudrait scruter l'univers dans toute son étendue pour déterminer s'il y a en lui de l'infiniment grand. »[40]

D. Hilbert a une vision scientifique sur le monde, basée sur le rapport science \ mathématiques :

« Seules l'observation et l'expérience sont compétentes pour en juger. »[41]

Donc, l'abord de la question de l'infini, est légitime seulement dans des cadres scientifiques. La métaphysique n'a –par la spéculation métaphysique- aucune légitimité, aucune crédibilité. D. Hilbert offre, par l'exemple (géométrique) de l'espace, un très suggestif argument dans ce sens :

« […] la tentative de prouver par la spéculation que l'espace est infini comportait des erreurs notoires. De ce qu'à l'extérieur d'une portion d'espace il ne peut y avoir que de l'espace, il ne suit que le caractère non-limité de l'espace, nullement son caractère infini. Or l'absence de limite et la finitude ne s'excluent pas. Les mathématiques fournissent avec la géométrie elliptique l'image naturelle de l'univers fini. »[42]

Aussi même dans les mathématiques certaines associations ou substitutions peuvent être illégitimes, illégitimité donnée par leur conséquences :

« […] il était extrêmement tentant d'identifier 'infini' et 'très grand', il y eut bientôt des incohérences, les soi-disant paradoxes du calcul infinitésimal… »[43]

D. Hilbert évalue que *« le véritable infini »* ne se trouve pas dans l'analyse mathématiques mais dans la théorie cantorienne des ensembles. Par exemple, une collection des éléments elle-même a_1, a_2,…,a_i,… , donné comme une unité achevée : l'ensemble de nombres entiers **Z** ; un segment de droite qui se présente comme : une collection de points comme *« un état de totalité achevée »* ; etc.

*« On appelle **infini actuel** cette sorte d'infini. »*[44]

L'infini actuel a été utilisé par Gustav Frege et Richard Dedekind pour fonder et pour déduire l'arithmétique sans appel à l'expérience ou à l'intuition mais appelant seulement à la logique. Georg Cantor est le mathématicien qui a développé d'une manière systématique le concept d'infini actuel. Il a élaboré la théorie des nombres transfinis qui est une partie de sa théorie des ensembles. Mais pour une nouvelle théorie, la pierre de touche est son succès dans la résolution de problèmes qui se posent dans cette théorie.

Sur ces questions, on doit mentionner encore l'apport considérable des autres mathématiciens du XIXe siècle : Bernard Bolzano, Augustin Cauchy, Bernhard Riemann, Karl Weierstrass, Eduard Heine, Giuseppe Peano.

---

[39] p.223
[40] p.223
[41] p.223
[42] p.223
[43] p.224-225
[44] p.225

D. Hilbert fait une courte présentation et 'exemplification' des nombres transfinis de Cantor (*« [...] les premiers nombres transfinis de Cantor, les nombres de la seconde classe, comme Cantor les appelle. »*[45] et aussi passe brièvement en revue l'histoire proprement mathématiques des nombres, de l'infini et des paradoxes, *« le travail gigantesque accompli par Frege, Dedekind, Cantor »* et aussi *« par Zermelo et par Russell. »*[46]

Dans la théorie des ensembles de Cantor, la définition classique d'un ensemble donnée par Cantor : 'un ensemble est un groupement en un tout d'objets bien distincts de notre intuition et de notre pensée ' n'est pas, mathématiquement parlant, suffisamment rigoureuse pour éviter *« la catastrophe qui est survenue* (*deux fois, une première fois avec les paradoxes du calcul infinitésimal*)*, une seconde fois avec les paradoxes de la théorie des ensembles [...] »*.[47] Cette théorie, grâce au concept d'ensemble, a permis une certaine unification des mathématiques. Mais les paradoxes ont menacé la théorie. Pour sauver la théorie des ensembles sans perdre ses avantages et pour résoudre les paradoxes, la première théorie des ensembles de Cantor a été modifiée par d'autres mathématiciens (Bertrand Russell, Ernst Zermelo, etc.) et en même temps, les mathématiciens ont commencé à explorer plus profondément les fondements des mathématiques. Les réflexions de Hilbert ont donné une impulsion à l'étude des définitions récursives.

Cantor a été critiqué par nombre de mathématiciens contemporains. Mais il a été défendu par D. Hilbert :

« Nous voulons examiner soigneusement les conceptualisations et les types d'inférences féconds de la théorie des ensembles, et, partout où c'est possible avec une chance de réussite, les étayer ou les rendre utilisables. Car il ne faut pas qu'on nous chasse du paradis que Cantor a crée pour nous. »[48]

Georg Cantor (1845 – 1918) a élaboré des notions et des théories mathématiques qui ont bouleversé la pensée mathématique. Une remarque de 'Cantor – le mathématicien' mérite d'être précisée ici: « Sans un petit grain de métaphysique, il n'est pas possible, à mon avis, de fonder une science exacte. La métaphysique telle que je la conçois est la science de ce qui est, c'est-à-dire de ce qui existe, donc du monde tel qu'il est en soi et pas tel qu'il nous apparaît. »

L'un de prédécesseurs de Cantor, Dedekind, a constaté que l'axiome : 'le tout est plus grand que la partie' n'est pas toujours vérifié. Par exemple : les nombres naturels **N** sont 'une partie' des nombres entiers **Z** ($\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$) mais tant $\mathbf{N} \to \infty$, tant $\mathbf{Z} \to \infty$: intuitivement, il existe des 'tout' aussi grands que certaines de leurs parties ! Dedekind a décidé de restreindre la validité de l'axiome ci-dessus. Abordant le problème des ensembles de manière plus globale, il a élaboré <u>un procédé de comparaison entre deux ensembles</u>, un concept mathématique –capital pour la théorie des ensembles- le concept de bijection.

Une caractérisation mathématique très courte de ce concept est la suivante : on dit que deux ensembles sont en relation de bijection si à chaque élément du premier ensemble correspond un et un seul élément du second et si, réciproquement, à tout élément du second

[45] p.226
[46] p.227
[47] p.236
[48] p.227

ensemble est associé un et un seul élément du premier. Par exemple, **N** et **Z** sont en relation de bijection.

Partant de cette caractérisation, on dira, en généralisant, qu'un ensemble est *infini* s'il est en relation de bijection avec une de ses parties. On observe que cette sorte d'infini est donné comme un tout, étant traité dans sa totalité, donc, il est un infini actuel !

Sans entrer en détails mathématiques, mais seulement pour faire un exemple de 'clarification qui doit accompagner' la lecture dans une fiche de lecture, on mentionnera encore quelques aspects mathématiques élémentaires, pour comprendre l'exposé de D. Hilbert de la page 226.

D'une façon similaire à l'exemple précédent (**N** et **Z**) est le rapport entre **N** – 'le tout' et les nombres pairs $\mathbf{N}_{2k}$ – 'la partie'. On considère **N** dans sa totalité et on l'appelle 'nombre de nombres naturels (ou nombres entiers positifs) : LE CARDINAL. Ce 'cardinal' (ou puissance) est encore appelé : card **N**. Cantor a noté card **N** par $\aleph_0$ (aleph zéro). Nous dirons, par définition, que : un ensemble en bijection avec **N** est infini et est de cardinal $\aleph_0$. Dans ce cas, $\aleph_0$ apparaît comme une sorte de mesure pour appréhender la taille d'un ensemble. Donc : card $\mathbf{N}_{2k}$ = card **N** = $\aleph_0$ et, pour le premier exemple, card **Z** = card **N** = $\aleph_0$.

Dans une autre expression, au lieu de dire qu'un ensemble E est infini de cardinal $\aleph_0$, on dit que c'est infini dénombrable (c'est-à-dire qu'on peut numéroter ou compter ou dénombrer les éléments de E à l'aide des nombres entiers positifs [nombres naturels]).

Avec cette construction, la mathématique est dans la possession d'un symbolisme pour *décrire*, *caractériser* et *signifier* ***l'infini***. Une arithmétique pas traditionnelle mais basé sur 'le nombre infini $\aleph_0$' s'appelle **arithmétique transfinie**. Par exemple, dans l'arithmétique transfinie, les points d'un intervalle peuvent être énumérés par les nombres de la seconde classe.

S'imposent quelques courtes observations qu'ils ne seront pas développées par la suite ici. Un ensemble fini est un ensemble qui n'est en relation de bijection avec aucune de ses parties. Dans ce sens, le fini est la négation de l'infini. Au contraire, l'infini défini ci-dessus, n'est pas la négation du fini.

Pour **R**, l'ensemble de tous les nombres réels, card **R** > $\aleph_0$ [se peut démontrer par 'le procédé diagonal de Cantor']. Dans le sens card **R** > $\aleph_0$, l'infini n'est pas unique. Cantor a établi que l'ensemble des nombres réels **R** a le même cardinal que l'ensemble des parties de **N** : card **R** = $2^{\aleph_0}$. On peut construire une série de cardinaux : $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$,… $\aleph_i$,…Dans ce sens on peut parler d'une infinité d'infinis.

Pourquoi ont été, en quelque sorte, détaillé les questions ci-dessus ?

Même la géométrie et l'arithmétique sont très proche dans leur sécurité 'inférenciale', dans la clarté de leurs démonstrations. Les affirmations de D. Hilbert sont très significatives pour la structure et pour le contenu de son article complet **sur l'infini** :

« Notre assertion pourra être scientifiquement vérifiée, c'est-à-dire qu'il sera possible effectivement, en procédant d'une façon purement intuitive et finitiste, exactement à la manière dont on procède lorsqu'on établit les vérités arithmétiques, de parvenir aux vues qui garantissent la sûreté du mécanisme mathématique. »[49]

[49] p.229

La géométrie pourra être scientifiquement vérifiée, elle est aussi purement intuitive et finitiste, etc., donc, pourquoi D. Hilbert a-t-il choisi particulièrement l'arithmétique pour ses considérations sur l'infini ? Une partie de la réponse se trouve dans les considérations, ci-dessus, entre les nombres et l'infini, au-delà des aspects méthodologiques – mathématiques qui approchent l'arithmétique et la géométrie. Mais une autre raison, plus importante, est liée au problème du continu, question qui est développée par Hilbert dans la seconde partie de son article sur l'infini. La question du continu, est : y a-t-il un infini entre celui de **N** et celui de **R**. Cette dernière raison est, principalement, le motif pour lequelle ont été, en bref, détaillées les questions ci-dessus.

D. Hilbert a proposé dans son article « Sur l'infini » de

« considérer l'arithmétique plus en détail. »[50]

mais ensuite, on n'entre pas plus dans les détails mathématiques-techniques, on mentionnera seulement les aspects principaux.

On se trouve devant les propositions d'existence de type 'il existe' :

« Dans le cas que nous venons de voir [le théorème d'Euclide], *l'analyse d'une proposition d'existence qui ne se laisse pas interpréter comme une disjonction finie, nous confronte avec le transfini. »*[51]

La manière hilbertienne –très simple et même parfois très profonde et suggestive- mérite d'être mentionnée, par un court exemple d'approche de l'analyse sur l'infini :

« [...] la disjonction suivante :

ou bien p + 1 ou bien p+2 ou bien p=3 ou bien ... ***ad infinitum,***

est en quelque sorte une somme logique infinie. Or un tel passage à l'infini est, sauf explication et éventuelles précautions, aussi peu permis qu'en Analyse le passage d'une somme finie à une somme infinie. En principe c'est une opération dénuée de sens. »[52]

Quelles sont les conséquences auxquelles on arrive à la fin de l'analyse sur les propositions finitistes dans lesquelles les expressions 'pour tout' et 'il existe' sont présentées ? Les conséquences dans le plan logique sont très significatives et elles ne peuvent pas être détournées :

« Si nous restons dans le domaine des propositions finitistes, comme nous le devons d'ailleurs, les relations logiques qui y règnent manquent singulièrement de perspicuité, et ce défaut s'aggrave au point de devenir insupportable lorsque 'tous' et 'il existe' se combinent ou bien apparaissent dans des propositions emboîtées les unes dans les autres. »[53]

D. Hilbert demande : *« Que faire ? »*. Il donne la directions de résolution :

« Souvenons-nous que ***nous sommes mathématiciens****, qu'il nous est déjà arrivé de nous trouver dans des situations aussi défavorables et que la méthode géniale des éléments idéaux nous a sauvés. »*[54]

En quoi consiste pour la logique cette direction de résolution ? Le réponse de D. Hilbert est :

[50] p.229
[51] p.230
[52] p.230
[53] p.231
[54] p.231

« […] il nous faut ici ajouter les propositions idéales aux propositions finitistes afin de maintenir en vigueur les règles formellement simples de la logique d'Aristote. »[55]

Donc, le problème est *« comment parvenons-nous aux propositions idéales ? »* D. Hilbert trouve *« le chemin qui conduit à elles »*, c'est-à-dire la solution :

« d'une manière naturelle et conséquente, dans la voie même que le développement de la théorie des fondements des mathématiques a déjà prise. »[56]

De suite, par l'entremise de la propriété de commutativité (du domaine de structures algébriques), D. Hilbert exemplifie une sorte de proposition finitiste avec contenu. C'est aussi une exemplification de ce que nous avons dit ci-dessus sur la caractérisation générale d'une *'proposition finitiste' :* c'est une proposition qui par des moyens mathématiques a un sens concret mathématique, a un sens opérationnel mathématique. Pour sa simplicité et dans le même temps pour sa profondeur, deux qualités toujours présentes et toujours raccordées dans l'article de Hilbert, on reproduira ce passage :

« […] une proposition à laquelle on a joint des indications touchant son contenu, reste recevable de notre point de vue finitiste, comme par exemple l'est le théorème que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

est toujours réalisé, **a** *et* **b** *désignant des chiffres déterminés, nous ne choisissons pas cette forme de communication, mais nous préférons poser la formule*

$$a + b = b + a$$

laquelle cesse d'être la communication immédiate d'un contenu, mais est un certain objet formel dont le rapport avec les anciennes propositions finitistes

$$2 + 3 = 3 + 2,$$
$$5 + 7 = 7 + 5$$

consiste en ceci que dans cette nouvelle formule nous substituons à a et b les chiffres 2, 3, 5, 7 et que par ce processus (qui est une démonstration, encore que très simple) nous obtenons ces propositions finitistes particulières. Nous en arrivons ainsi à comprendre que a, b, =, +, de même que la formule tout entière

$$a + b = b + a$$

n'ont pas en soi de sens, pas plus que n'en ont les chiffres ; mais de cette formule nous pouvons déduire des formules auxquelles nous attribuons un sens en les regardant comme la communication de propositions finitistes.»[57]

Cette exemplification permet à D. Hilbert de faire une autre caractérisation des mathématiques et aussi de faire une clarification conceptuelle sur deux des notions majeures de son article : 'les propositions finitistes' et 'les objets idéaux'.

« Si nous généralisons cette conception [ci-dessus, (nn)], *les mathématiques deviennent un réservoir de formules qui contiendra en premier lieu celles auxquelles correspond la communication de propositions finitistes, et ensuite d'autres formules qui n'ont pas de sens et qui constituent les objets idéaux de notre théorie. »*[58]

Après une analyse sur l'opération logique de 'négation' appliquée aux propositions finitistes, après une analyse sur le principe logique du 'tiers exclu' et après quelques

[55] p.231
[56] p.231
[57] p.232
[58] p.232

considérations sur le rapport entre propositions finitistes, propositions transfinies et propositions idéales, D. Hilbert conclut :

« Il devient donc nécessaire de formaliser ces opérations logiques et aussi les démonstrations mathématiques elles-mêmes ; ceci requiert une transposition des relations logiques en formules. Pour l'effectuer, nous ajouterons aux signes mathématiques des signes logiques tels que $\&, \vee, \rightarrow, \overline{}$, *et, ou, implique, non, et en plus des variables mathématiques a, b, c, ..., nous emploierons des variables logiques à savoir des proposition A, B, C, ... »*[59]

D. Hilbert demande : *« Comment cela se fera-t-il ? ».*

Sans entrer en beaucoup de détails et sans exemplifier de manière quasi - exhaustive comme ci-dessus, on dit que la réponse de Hilbert est : *« d'exposer comment les* ***démonstrations mathématiques*** *sont formalisées ».* Ici est le lieu de voir, brièvement, comment D. Hilbert caractérise 'la démonstration' :

« Comme je l'ait dit, certaines formules qui servent de pierres d'angle pour la construction formelle des mathématiques seront nommées axiomes. Une démonstration mathématique est une figure qui comme telle doit se présenter à notre intuition ; elle consiste en inférences conformes au schéma d'inférence

$$\frac{\begin{array}{c}\zeta \\ \zeta \rightarrow \mathfrak{I}\end{array}}{\mathfrak{I}}$$

chacune des prémisses, i.e. des formules qui jouent le rôle de ζ *et* $\zeta \rightarrow \mathfrak{I}$*, étant soit un axiome, soit obtenue d'un axiome par substitution, soit identique à la formule finale d'une inférence antérieure, soit obtenue d'une telle formule par substitution. Une formule sera dite démontrable lorsqu'elle est la formule finale d'une démonstration. »*[60]

Mais, D. Hilbert reconnaît que sa théorie de la démonstration n'est pas capable, elle-même, d'assurer les fondements de la science mathématique.

Pour construire sa théorie de la démonstration, D. Hilbert présente cinq groupes d'axiomes, distincts les unes des autres : *« **I**. Axiomes de l'implication et **II**. Axiomes de la négation [l'axiomes du calcul propositionnel] ; **III**. Axiomes transfinis [déductibles de l'axiome de choix]; **IV**. Axiomes de l'égalité, **V**. Axiomes du nombre (axiome de l'induction mathématique)[les axiomes spécifiquement mathématiques].»*[61]

On doit mentionner que les axiomes fournissent seulement le cadre général d'une théorie.

Dans ce contexte il aborde le problème de la non – contradiction.

« [...] nous résolvons ainsi un problème qui a été brûlant longtemps, celui de démontrer <u>la non-contradiction des axiomes de l'arithmétique</u>. Partout en effet où on emploie la méthode axiomatique, apparaît le problème de prouver la non-contradiction. »[62]

Encore une fois -je dois mentionner son talent d'écrivain- D. Hilbert donne une admirable caractérisation de la reine des sciences, la mathématique :

---

[59] p.233
[60] p.234
[61] p.234-235
[62] p.236

« La mathématique s'agrandit en une sorte de cour d'arbitrage ou de cour suprême apte à décider de toutes les questions de principe, en partant d'une base concrète sur laquelle tout le monde est forcé de s'entendre et qui sera la pierre de touche de la vérité de toute assertion. »[63]

D. Hilbert a élaboré une théorie formelle logico-mathématique de la démonstration. Avec une telle construction, on pose aujourd'hui la question : un ordinateur peut-il être capable de résoudre actuellement tous les problèmes mathématiques ? Donc, quelle est la vraie importance de la théorie hilbertienne de la démonstration ? La réponse a été donnée par D. Hilbert lui-même :

« Sans doute ma théorie de la démonstration n'est-elle pas capable d'indiquer en général un moyen propre à résoudre chaque problème mathématique –un tel moyen n'existe pas- mais la preuve que l'hypothèse de la résolubilité d'un problème mathématique quelconque n'est pas contradictoire, est tout à fait de la compétence de notre théorie. »[64]

Par la suite (p. 238) l'article porte sur la question du continu et sur son rapport avec les nombres réels et avec l'infini. On se dit que la question du continu, est de savoir s'il y a un infini entre celui de **N** et celui de **R**. D. Hilbert procède de la même manière jusqu'ici, de présentation élémentaire et compétente des aspects mathématiques très abstraits : *« Pour saisir l'idée de la démonstration du théorème du continu, il faut d'abord avoir une compréhension claire du…*(etc.) *»*[65]

On mentionne ici seulement que, la présentation élémentaire du problème du continu se pose dans le contexte présenté en détail ci-dessus : la correspondance biunivoque d'un ensemble avec un ordinal. D. Hilbert fonde l'hypothèse du continu sur une bijection avec les nombres cantoriens de la seconde classe :

« […] prouver le théorème du continu revient essentiellement à associer d'une façon univoque et réciproque [=biunivoque] les définitions de fonctions arithmétiques qui ne contiennent pas le symbole ε^{*}[66]*, aux nombres cantoriens de la seconde classe, ou bien de les leur associer de telle manière que chaque fonction arithmétique soit l'image d'au moins un nombre de la seconde classe. »*[67]

La solution de Hilbert est, sans doute, une solution formaliste. Quelles sont les conclusions tirées par D. Hilbert à la fin de son article ?

« Le résultat final est celui-ci : l'infini ne se trouve nulle part réalisé, il n'est ni présent dans la nature, ni admissible comme base de notre pensée rationnelle : ceci est encore une preuve de l'harmonie entre le réel et la pensée. En opposition avec les anciennes tentatives de Frege et de Dedekind, nous sommes parvenu à la conviction que certaines représentations et idées intuitives sont des préalables nécessaires à la possibilité de la connaissance scientifique et que la logique toute seule ne peut pas tout. Le droit d'opérer avec l'infini ne saurait être assuré que par des moyens finis. »[68]

---

63 p.236

64 p.237

65 p.239

66 * La signification logique de symbole ε est de permettre de transformer des formules qui contenaient des quanteurs en des formules sans quanteurs qui se réduiront à des fonctions de vérité d'équations entre termes numériques (propositions réels). [p.235 (✯)]

67 p.240

68 p.245

Donc, le but de D. Hilbert a été de trouver une méthode systématique de transformer toute démonstration fondée sur l'infini en des démonstrations fondées sur des raisonnements où l'infini n'est plus présent. Une autre idée a été de démontrer que les systèmes finites des axiomes non contradictoires, définissant les nombres réels, ne peuvent pas générer une proposition en même temps fausse et vraie (le principe du tiers exclu). Recourant à un nombre fini d'axiomes, d'opérations mathématiques et d'inférences logiques, D. Hilbert a essayé de maîtriser l'infini.

L'important dans le programme de Hilbert, ce n'est ni les thèses philosophiques, ni la conception du signe sensible; ce qui compte, c'est la signification à donner aux démonstrations des consistance. L'analyse de la signification d'une démonstrations de consistance peut être plus difficile que cette démonstration elle-même.

Mais est-elle, l'arithmétique, aussi indubitable que le crut Hilbert ? Après seulement quelques années (1931), Kurt Gödel a établi que dans n'importe quelle théorie mathématique existent des propositions qui sont indécidables : ces propositions on ne peut ni les prouver ni les réfuter. Dans une théorie axiomatique suffisamment riche (construite à partir d'un nombre fini d'axiomes) pour contenir la structure mathématique des nombres entiers, comme est l'arithmétique, on peut toujours trouver une proposition qui n'est ni la conséquence des axiomes, ni en contradiction avec eux. Un nouveau concept est né : **l'indécidable**. C'est-à-dire que, pour certaines situations mathématiques, une proposition mathématique n'est pas forcément ou fausse ou vraie : on ne peut pas décider entre faux et vrai. Le statut binaire : le vrai et /ou le faux n'est pas plus absolu. L'hypothèse du continu, la proposition sur l'existence d'un infini intermédiaire entre celui de **N** et celui de **R** est une des propositions indécidables de la théorie des ensembles, proposition à laquelle on ne peut répondre ni affirmativement ni négativement.

L'infini se glisse partout en mathématique. L'infini n'est pas maîtrisable.

La question de « ***l'infini*** » reste encore ouverte.

Mais le programme de HILBERT ? Gödel montra qu'il existe des propositions vraies du point de vue du metalangage qu'il est impossible de démontrer par une preuve de longueur finie. Pour un mathématicien qui ne peut accéder à la certitude qu'au moyen d'une démonstration, avec une telle proposition pour conjecture, il sera impossible à jamais de la prouver ou de la réfuter.

Les théorèmes mathématiques se démontrent à partir d'axiomes qui, eux, sont admis ; l'ensemble d'axiomes choisi devait être non contradictoire (c'est-à-dire consistant) et présenter une assise suffisante pour décider de la véracité ou de la fausseté de toute proposition mathématique ; a partir des axiomes, on démontrerait toutes les propositions vraies $\rightarrow$ *la vanité d'une telle recherche !*

BIBLIOGRAPHIE

1. Gottlob FREGE – *Les fondements de l'arithmétique*, Editions du Seuil, 1969, Paris.
2. Louis CONTURANT – *De l'infini mathématique*, Libraire scientifique et technique, 1973, Paris .
3. Bertrand RUSSELL – *Introduction à la philosophie mathématique*, Editions Payot, 1991, Paris.
4. Jean-Pierre BELNA – *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*, Editions Vrin, 1996, Paris.

5. Constance REID – *Hilbert*, Ed. Spring-Verlang, Inc., 1996, New-York.
6. Xavier VERLEY – *Logique symbolique*, Editions Ellipses, 1999, Paris.
7. A. FRÖHLICH & M. J. TAYLOR – *Algebraic number theory*, Cambridge Press, 1991.
8. M. KLINE – *Mathématiques : la fin de la certitude*, Christian Bourgois, 1989.
9. T. LEVY – *Figures de l'infini : Les mathématiques au miroir des cultures,* Le Seuil, 1987, Paris.
10. Commission inter-IREM , « Epistémologie et histoire des mathématiques » - *Histoire d'infini*, Actes du 9e colloque inter-IREM Epistémologie et histoire des mathématiques , Landernau, 22-23 mai 1992, IREM de Brest.
11. E. NAGEL, J. R. NEWMAN, K. GÖDEL, J.- Y. GIRARD – *Le théorème de Gödel*, Le Seuil, 1989, Paris.
12. Yehoshua BAR-HILLEL, E. I. J. POZNANSKI, M. O. RABIN, Abraham ROBINSON – *Essays on the Foundations of Mathematics*, Magnes Press, 1961, Jerusalem .
13. S. C. KLEENE, R. E. VESLEY – *The Foundations of Intuitionistic Mathematics*, North-Holland, 1965, Amsterdam.

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

GODEL`S LOGICAL TURN

MOISIE IGNAT

SUMMARY

The paper addresses the problems of incompleteness theorem and their role in devastating our classical modality of thinking and judgement. Godel`s logical turn shows that there are arithmetic truths which cannot be derived from their axioms, even if we supplement the original set of axioms with an infinity of additional axioms. A famous version of the argument from essential incompleteness considers adding a `godelizing operator` to the system. The results suggest impossibility to understand completely, in the literal, metaphorical, formal and computational sense of the word. The soundly search of relations between formal and specular self-reference and self-recognition might connect the formation of a self-concept with (on) the capacity for self-recognition

1.INTRODUCTION

Since antiquity, among the sciences, mathematics has a unique relation to philosophy especially logic. Even today some use to think that mathematical truth consisted in provability. Philosophers have envied it as the model of logical perfection because of the clarity of its concepts and the certainty of its conclusions. Mathematical logic is the study of the processes in mathematical deduction [4]. The subject has origins in philosophy, and indeed it is only by nonmathematical argument that one can show the usual rules for inference and deduction (law of excluded middle; cut rule; etc.) are valid.

It is also a legacy from philosophy that we can distinguish *semantic* reasoning (`what is true?`) from *syntactic reasoning* (`what can be shown?). The first leads to *Model theory*, the second, to *Proof theory.*Therefore*,* they have devoted much effort to explaining the nature of mathematics. Worthy to notice only *that* one of the most interesting features of mathematics is its applicability to empirical science.

Obviously, many contemporary mathematics don't fell the need the blow to logic, because they think that mathematics isn't the principle example of rationality. But mathematics is a `rationally coherent structure` and is based on logical reasoning. Every mathematician uses modus ponens, reductio ad absurdum and other logical rules without even thinking about this very much. This is like the atmosphere without which the life is impossible. Almost everyone knows that it is mathematical logic which is used to show its independence. This mere knowledge is usually enough without any real need to go into details on forcing. A new capability of being to decided writs. A solvable decision problem or a computability problem have a new representation [6].

Astonishingly, little is known outside the professional circles of logic and mathematics about devastating our classical modality of thinking and judging by the so called greatest logician since Aristotle, unquestionably the greatest logician of the 20^{th} century. He had a strong philosophical bent towards realism/platonism which also motivated his *(meta)mathematical discoveries*. Godel first thought that his theorems established the superiority of mind over machine [10]. Certainly his achievements has become a hallmark of the century mathematics, and its repercussions continue to be felt and debated.

Godel deprived arithmetic of its hope of completeness and its certainty of consistency, devastates the concepts of logic and mathematics that prevailed for the two or three millennia of mathematical history before his theorems.(*Godel theorems)*, overturn the glory of this subject and bring an epoch to a close.

2. DECIDABILITY AND INCOMPLETENESS THEOREMS

Evidently, now, decidability knows as property of statement or formula capable, within the system to which it belongs, of being proved or disproved, or of being showing to be true or false, or to have some other property or not to have it become unsuitable. In other cases a system is to be reckoned decidable as long as both the derivable and the underivable formulae are recursively enumerable.

Godel proves that within any rigidly logical mathematical system there are propositions (or questions) that cannot be proved or disproved on the basis of the axioms of that system and that therefore it is uncertain that the basic axioms of arithmetic will not give rise to contradictions [2]. His contribution is best known for his *incompleteness theorem*.

The first incompleteness theorem shows that some perfectly well-formed arithmetical statements could never be proved true or false, that axiomatic systems, like Euclid's exemplary systems for geometry, could never capture all the truths of arithmetic. Worse, it shows that some arithmetical truths could never be proved true. In other words, for every axiomatic system designed to capture arithmetic, there will be arithmetic truths which cannot be derived from its axioms, even if we supplement the original set of axioms with an infinity of additional axioms [3]. This shattered the assumption that every mathematical truth could eventually be proved true, and every falsehood disproved, if only enough time and ingenuity were spent on them.

The second incompleteness theorem shows that the consistency of such a system could never be proved by reasoning inside the system, that axiomatic systems of arithmetic could only be proved consistent by other systems. This made the proof conditional on the consistency of the second system, which in turn could only be validated by a third, and so on. Evidently, no consistency proof for arithmetic could be final, thus our confidence in arithmetic could never be perfect.

An axiom is `independent` if it cannot be derived from he other axioms, and they cannot be derived from it [3]. In general, axioms ought to be independent from one another. If they are not, then at least one of them could be removed from the set of axioms without reducing its strength. To leave a superfluous principle in the set of axioms is simply inelegant.

Indeed the proofs of independence are important for more than elegance. If an axiom is independent, then it can be replaced by its negation without creating inconsistency in the system. Euclid's parallel postulate is the most famous example. For centuries it did not seem independent, yet attempt after attempt to derive it from Euclid's other axioms ended in failure. Hilbert finally proves the parallel postulate independent.

The fact that a particular sentence is neither provable nor disprovable within a system only means that it is *logically independent* of the axioms. They are not strong enough to either establish or refute it – they don't say enough about it one way or the other. By adding additional axioms (or rules of inference) might make the sentence provable. But in Godel`s cases, this does not work: even if Godel`s sentence is added as an additional axiom, the new system would contain another unprovable sentence, saying of itself that it is not provable in the new system. This form of self – perpetuating *incompleteness* might be called *essential incompleteness*.

3. FULL INDEPENDENCE PROOF

The answer whether Godel really discovered a full independence proof for finite type theory may lie in Godel`s Blue Hill. In this place he worked on one aspect of the axiom of choice acceptability: its consistency with the axioms of finite type theory [2]. He had proved that the axiom of choice could not be disproved by the axioms of stronger, standard set theory. This means that it can be added to standard set theory without introducing any inconsistencies that were not already there. Hence, we can have as much confidence in it as we have in the standard axioms. This is why most mathematicians accept the axiom today.

Despite its obscurity, the axiom of choice has been the subject of more written controversy than any other axiom in mathematics, including the parallel postulate. Essentially the axiom of choice says that if we have a set of nonempty sets, then we can construct a new set by taking a member from each of the existing set [3]. For example, we can make a new class of students by taking one student from each of many other classes. More precisely, the axiom holds that there will always be a definite rule (function) for making the selections, even if we have no idea what such a rule would look like.

The axiom of choice appears harmless, but if we accept it we are led to some very unusual results. For example, it helps us prove the Banach-Tarski theorem, which says that if we cut up a sphere into a large enough number of small scraps, then we can reassemble the scraps into a sphere with twice the surface area of the original. The axiom of choice also helps us prove that the real numbers can be well-ordered, that is, that they can be rearranged so that every subset of them has a smallest member. Some sets of real numbers, such as all those greater than 1 and less than 2, have no least member and no greatest member. We have no idea how to rearrange them so that they become well-ordered, but the axiom of choice assures us that there is such an arrangement.

If the axiom of choice is independent of the standard axioms of set theory, then the controversy over its acceptability quiets down a few notches, for then *both* those who accept it and those who reject it are using consistent set theories (or are not using inconsistently theories simply on account of their decision on the axiom of choice). Moreover, if it is independent, then we have discovered a "doorway" through which to create non-standard set theories.

Set theory in which the axiom of choice is replaced by its negation is called Non-Cantorian set theory for a somewhat involuted reason: the negation of the axiom of choice implies the negation of the generalized continuum hypothesis (GCH). The GCH holds that infinite numbers only come in certain kinds. For a time Gödel disputed this, and tried to prove that there was an infinite quantity in between *a* and *b*. He agreed with Cantor that the number of real numbers was *b*, but he thought this was the second, not the first, infinite quantity greater than *a* or the number of natural numbers. Eventually he changed his mind about this and spent the rest of his career trying without success to prove either the continuum hypothesis or its generalized variant.

Proving the independence of the axiom of choice would not falsify the generalized continuum hypothesis, but open up the world of non-standard set theories in which it was replaced by its negation. Godel's proof provided the related result that the negation of the axiom of choice could not be derived from the standard axioms He tried to work out a complete independence proof, though from the weaker system of finite type theory.

5. LIMITATION WHICH DOES NOT LIMITATE

Godel`s theorems uncover a fundamental limitation of formalization, but they say that this limitation could be overcome only at the price of consistency. We might thus say that the limitation is so fundamental as to be no limitation at all. The theorems do not reveal any weakness or deficiency of formalization, but only show that the supposed ideal of formalization – proving all and only all true sentences – is self-contradictory and actually undesirable:

- what good is a formalization that can prove a sentence which says that it is *not* provable (first theorem)?
- what good is a formalization that can prove its consistency when it would follow that it is *not* consistent (second theorem)?

On the positive side, the theorems shows that certain formal system have a much more intricate, reflexive structure then formally suspected, containing much of their own meta – theory.

6. SENTENCE- G

Godel`s theorems are actually special, self-referential consequences of the requirement of consistency: in a consistent system, something must remain unprovable. One unprovable statement is the statement of that very fact, namely the statement which says of itself that it is unprovable (*first theory*): you cannot prove a sentence which says that it can't be proved (and remain consistent). Another unprovable statement in a consistent system is the statement of consistency itself (*second theorem*). In addition, if the formal system has a certain stronger form of consistency, the sentence that asserts its own unprovability, called the Godel sentence, (*sentence-G*) is also not refutable in the system.

Later, similar sentences were constructed, showing that consistent formal systems cannot prove many things about themselves. At the same time a formal system can retain all the insight into itself that is compatible with consistency.

Thus, although it cannot prove its *sentence-G*, if it is to remain consistent, it can prove that very fact, namely the fact that it cannot prove its *sentence-G* if it is consistent. Godel's theorems undermine the customary identification of truth with provability by connecting truth with *un*provability: the first theorem presents a case of not provable imply true (if the sentence asserting its own unprovability is not provable, then it is true); the second theorem presents a case of true imply not provable (if the sentence asserting the consistency of the system is true, then it is not provable). Thus , Godel's theorems do not actually establish any disturbing discrepancy between provability and truth.

Furthermore, the implication above is an oversimplification: assuming consistency, Godel's sentence is not simply true, because it is not always true i.e. in all interpretations. If it were, it would be provable, by the completeness theorem (also proved by Godel), as noted in [8-116]: provability is truth in *all* interpretations). The first theorem shows that if the system is consistent, it can be consistently extended with the *negation* of the Godel sentence, which means that the sentence is actually false in some models of the system. Intuitively, without going into details, this could be explained by saying that in those models the Godel sentence acquires a certain stronger sense of unprovability that those models do not support.

Godel's theorem thus shows that there must always exist such unusual, unintended interpretations of the system.

7. OPERATOR-G

Sometimes we tend to reinterpret Godel's incompleteness result as asserting not primarily a limitation on our ability to *prove* but rather on our ability to specify what we *mean* ... when we use a symbolic system in accordance with recursive rules.

The procedure whereby the Godel formula is constructed is a standard procedure, because for expressing the truth of the Godel sentence, as opposed to proving it, even the most restricted definition of the truth predicate true, covering sentences containing at most one quantifier, is sufficient.

A more intricate version of the argument from incompleteness considers adding a `godelizing operator` to the system.

The sound part of this argument is already contained in the notion of essential incompleteness: a Godel operator only fills a deductive "lack" of the system by creating a new one. Adding the Godel sentences of a system as a new axiom extends the notion of provability and thereby sets the stage for a new Godel sentence, and so on. Thus, a Godel operator only shifts the original "lack" of the system through a series of displacements, without ever completing the system. Another argument, especially in the form advanced [8], now centers on how far into the transfinite can a Godel operator follow the mind's ability to produce the Godel sentence of any system in the sequence .

$$
\begin{gathered}
S_0 \\
S_1 = S_0 + G(S_0) \\
S_2 = S_1 + G(S_1) \\
\ldots \\
S_\omega \\
S_{\omega+1} = S_\omega + G(S_\omega)
\end{gathered}
$$

The relevant result here is the theorem which says that there is no recursive way of naming the constructive ordinals [6-476]. This would mean that a Godel operator could only follow the mind's ability to produce Godel sentences through the recursively nameable infinite; cf. [8- 114].

But for the purposes of this paper it is more interesting to observe that it does not seem plausible that the argument about the formalizability of mind should be decided by the outcome of the race between mind and machine over remote reaches of transfinite ordinality.

8. DIAGONALIZATION OPERATES

A further possibility in the direction of making reflexive formal models is to make the progression of reflexive theories itself reflexive. The usual ways of extending a reflexive theory by adding its Godel sentence, or the statement of consistency, or other reflection principles are themselves not reflexive: what is added to a theory only says something about that theory, and nothing about the one which its addition produces. Thus, what is usually added to a theory does not take into account the effect of that very addition, which is to shift the incompleteness of the original theory to the extended one.

Of course, certain things about the extended theory cannot be consistently stated; for example, the sentence stating that its addition to a theory produces a consistent theory would lead to contradiction, by the second Godel theorem.

But the sentence that is added to a theory could make some other, weaker statement about the theory which its addition produces. If the procedure of theory extension operated not only on the theory it is to extend but also on a representation of itself, it could build on its own action and improve its effects. It might thus produce in a single step an extension which is much further down the basic sequence of extensions, produced by linear additions of Godel sentences; the size of this ordinal jump could then be taken as a *measure of the reflexivity* of the procedure.

This kind of procedure, operating on something which contains a representation of that procedure itself, is already familiar from the construction of the Godel sentence: the process of diagonalization operates on a formula containing a representation of (the result of) that very process [6-446].

9. THE PROLOG META-CIRCULAR INTERPRETER

Another example of a reflexive procedure of this kind would be the Prolog meta-circular interpreter, which can execute it, though only to produce statements of iterated provability.

In saying of itself that it is not provable, the sentence-G combines three elements: 1) *the representation of provability*, 2) *self-reference* and 3) *negation*. The first ingredient in Godel's sentence, the representation of provability, corresponds to the explicit definition of the provability predicate of a logic programming language in that same language. In the simplest case, specifying *Prolog provability in Prolog*, the definition consists of just a few clauses, comparable to those which express the conditions on the provability predicate under which Godel's theorems apply. This definition of *Prolog provability* is then used as a *meta-circular interpreter* to extend the deductive power of the basic interpreter, for example by detecting loops in its proof attempts. This use of the meta-circular interpreter could be compared to the work of the operator-G on extending the basic, incomplete theory. Meta-circular interpretation is also applicable to other programming languages.

Generalizing meta-circular interpretation, provability can be specified in a separate meta-language, and reflection principles defined for relating and mixing proofs in both languages. Such meta-level architectures can be used to implement reflective or introspective systems, which also include an internal representation of themselves and can use it to shift from normal computation about a domain to computation about themselves in order to achieve greater flexibility.

Meta-level architectures are useful for knowledge representation, allowing the expression and use of meta-knowledge, and opening the possibility of computational treatment of introspection and self-consciousness. For example, an architecture of self-knowledge and self was suggested in which indexicals mediate between *bottom level* representations, in which the organism is not itself represented, and *higher levels* at which it is represented generically, as any other individual.

10. NUMERICAL MIRROR

The basic lesson of Godel theorems, namely that the ability for self-reflection has certain limits, imposed by consistency, does not seem to be less true of minds than it is of formal systems. Applied to minds, it would translate to some principled limitation of the reflexive cognitive abilities of the subject: certain truths about oneself must remain unrecognized if the self-image is to remain consistent [6-696]. This formulation recalls the old philosophical imperative which admonishes the subject to know himself. If this were simple or possible to do completely, there would be no point to it; the same goes for the explicit interrogative forms: who am I, where am I going, what do I want, ... etc.

Are there highly repetitious situations which occur in our lives time and time again, and which we handle in the identical stupid way each time, because we don't have enough of an overview to perceive their sameness? [*6*-614].

Such an overview can be hard to achieve, especially in regard to oneself, as one knots in which minds get entangled show. In a similar vein, some researchers suggest that the limitative theorems show the mathematical form of the pragmatic paradoxes to which humans are susceptible in communication.

It may be that the phrase 'the Godel sentence of a man' is an implausible construction, but certain interpretations might be imagined, such as self-falsifying beliefs. On a humorous note, the Godel sentence for a human could work like a recipe for self-destruction, activated in the process of its comprehension or articulation ("self-convulsive", "self-asphyxiative", "self-ignitive",...) A more elaborate interpretation, as the paralyzing effect of some self-referential cognitive structure, is presented in Cherniak's story [6-269]. The history of logic itself records lethal cases (Philetas) and cases of multiple hospitalization (Cantor, Godel). Of course, this is all anecdotal, speculative and inconclusive, but it does suggest that the apparent gap between minds and machines could be bridged, in two related ways:

- the vulnerability of minds to paradoxes of self-reference
- the implementation of self-referential structures in machines

The mind-machine gap could thus be reduced by emphasizing the formal, machine-like aspects of the mind and/or by building mind-like machines.

Finally, taking speculation one literal step further, the self-reference in Godel's sentence can be compared to a formal way of self-recognition in the mirror, by noticing the parallelism between things (posture, gesture, movement) and their mirror images. The basis for this comparison is the way the Godel code functions as a numerical mirror in which sentences can refer to, "see" themselves or other sentences "through" their Gödel numbers. The comparison covers the stages of construction of Godel's sentence and relates them to the irreflexivity of vision and the ways of overcoming it. The comparison attempts to turn arithmetical self-reference into an idealized formal model of self-recognition and the conception(s) of self-based on that capacity.

The motivation for this is the cognitive significance of the capacity for self-recognition, in mirrors and otherwise. The ability to recognize the mirror image, present in various degrees in higher primates and human infants, has been proposed as an objective test of self-awareness. Self-recognition in the mirror is a basic, even paradigmatic case of self-recognition, the general case being the recognition of effects on the environment of our own presence in it. Self-recognition in this wider sense is the common theme of some conditions for ascribing and having a self-concept and consciousness. Self-recognition is also the common theme of the self-referential mechanisms which constitute the self:

- indexicality (self-relativity of representations)
- autonimy (recognizing one's own name)
- introspection (recognizing one's own internal structure)
- reflection (recognizing one's place in the world)

11. CONCLUSION

i) Generally the limitative theorems show the mathematical form of the pragmatic paradoxes to which humans are susceptible in communication.

ii) The assertion that the ability for self-reflection has certain limits, imposed by consistency, does not seem to be less true of minds than it is of formal systems. Translate it to some principled limitation of the reflexive cognitive abilities of the subject: certain truths about oneself must remain unrecognized if the self-image is to remain consistent.

iii) It is not possible to see oneself completely, in the literal, metaphorical, formal and computational sense of the word. Godel's theorems do not prevent the construction of formal models of the mind, but support the conception of mind

iv) The comparison between formal and specular self-reference and self-recognition might also connect these contemporary attempts to base the formation of a self(-concept) on the capacity for self-recognition with the long philosophical tradition of thinking about the subject in optical terms.

BIBLIOGRAPHY

1. Ayn, Rand, *Introduction of Objectivist Epistemology*, New York, Penguin Group, 1990
2. Godel, Kurt., *Collected Works, voI, Publications 1929-1936*, Oxford University Press, 1986
3. Godel, Kurt., *Collected Works, vol. III, Publications 1961*, Oxford University Press, 1981
4. Guy, R.,K., *Unsolved problems in number theory*, Spring Verlag, New York, 1994
5. Hawking, S.W., *A brief history of time,* Bantam Press, London, 1988
6. Hofstadter, O.R., *Godel, Esher, Bach: an eternal golden braid,* Harvester Press, Hassocks, Sussex, 1979
7. Madden, Edward, H., *The Structure of Scientific Thought,* University of Washington Press, 1986
8. Penrose, Roger, *The Emperor`s New Mind. Concerning Computers, Minds and Laws of Physic,* Oxford University Press, 1989 (ed.rom. 1996)
9. Rorty, R., *Philosophy and the Mirror of Nature,* Oxford, 1980, (Frankfurt, 1981)
10. Wang, Hao, *Reflections on Kurt Godel*, MIT Press, 1987

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

GÖDELIAN QUESTION

LÁSZLÓ GÁL

Every white hath its black, and every sweet its sour.
(Proverb)

ABSTRACT

The author starts from a proof of Gödel's theorem. He then tries to generalise the essence of this theorem by introducing the concept of Gödelian question. He deals with examples of Gödelian questions in molecular biology, society and the educational system. The final part of the paper presents the author's findings about Gödelian questions in everyday life, on a sample of proverbs.

1. Introduction

The basic laws of logic are the pillars of rationalism in European culture. The millenary achievement-centred forms of activity from sale and purchase, which are in the centre of the production of goods, to the sciences, reject the negation of identity and the true and false logical values attached simultaneously to statements. Therefore, whenever the assertion and denial of a statement had the same status, the basis of rationality itself was shattered. Consequently, achievement itself became impossible. Understanding, communication, effective action and belief also became impossible. All these cases have something in common, namely, the undecidability of the situation.

If we cannot decide about a statement whether it is true or false, then knowledge and the existence of true knowledge itself is questioned. In this case, there is no difference between true and false, and distinction itself becomes meaningless. True knowledge becomes questionable because true knowledge as opposed to false knowledge has had a distinguished role in the millenary European history of knowledge.

Gödel's theorem concerns the appearance and existence of contradiction. This paper deals with the spread of contradictions and their nature in the field of arithmetic and proposition calculus.

2. Gödel's proof

Kurt Gödel proved his famous theorem in two fields. In arithmetic it means that the truth of a given arithmetic proposition cannot be proved. That is, the attempt to build up arithmetic axiomatically entails that we will always find an arithmetic proposition whose truth-value is undecidable. This means that if the arithmetic system is decidable, it is incomplete and if it is complete it is also undecidable. In other words, the whole of arithmetic truths cannot be summed up in a single axiomatic system.

In the field of classical proposition calculus Gödel proved the undecidability of Principia Mathematica-type systems. He proved the undecidability of arithmetic in a lengthy demonstration, difficult to follow. Therefore we show here the easier proof in proposition calculus. However, arithmetic can be built up within a Principia Mathematica-type system.

Gödel uses the following denotations in his proof for Principia Mathematica-type systems:

$\mathbf{F_{(x)}}$ is the sign of a given class defined by its predicate

$\mathbf{Par_{(x)}}$ the sign of the class of even numbers

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$ the set of class-signs

R is the order relation of class-signs (the order in which they are arranged), **n** the position of the class-sign in the series. Both the concept of class-sign and the concept of order can be defined in the Principia Mathematica-type systems.

$[\alpha, n]$ is the replacement of the α class-sign with the position **n**.

Thus, if $P_{(x)}$ is in position 10,

$$[Par_{(x)} ; 10] \equiv Par_{(10)} ,$$

which is a true proposition. However, for position 13

$$[Par_{(x)} ; 13] \equiv Par_{(13)}$$

is a false proposition.

Let us define a class K of natural numbers as follows:

$$(1)\ n \in K \equiv \sim Bew\ [R_{(n)} ; n],$$

where Bew is the abbreviation of the German Beweisbar (demonstrable), the sign ~ is the sign of negation. Let S and K be class-signs and $S = R_{(q)}$ the order relation of S. Therefore [S; q] means that $q \in K$.

In the following the aim of the Gödelian proof is to demonstrate the undecidability of $[R_{(q)} ; q]$.

a) Let us suppose that

$$Bew\ [R_{(q)} ; q] ,$$

which means that $q \in K$. In the first step of the proof , according to (1),

$$q \in K\ \equiv \sim Bew\ [R_{(q)} ; q], \text{ if we replace n with q.}$$

In the second step, using the modus ponens inference rules we have

$$\sim Bew\ [R_{(q)} ; q]\ \ \text{(the proposition } [R_{(q)} ; q] \text{ is undemonstrable),}$$

which contradicts our hypothesis.

b) Let us suppose that

$$\sim Bew\ [R_{(q)}\ ;\ q],$$

which means that $q \notin K$. According to (1) we have

$q \notin K \equiv \sim \sim Bew\ [R_{(q)}\ ;\ q]$, if we replace n with q. Applying the modus ponens inference rules and the rule of double negation, we could write:

$$Bew\ [R_{(q)}\ ;\ q].$$

Again, this is in contradiction with our hypothesis.

Thus both $[R_{(q)}\ ;\ q]$ and its negation, that is, both its truth and falseness are demonstrable, therefore this is an undecidable proposition.

Generalising, we could say that we have found a p proposition which states about itself that it is undemonstrable:

$$p = Ind\ ("p"),$$

where Ind is the abbreviation for "undemonstrable".

It is obvious that the hypothesis and result of Gödel's demonstration resembles the paradox of the false. It leads to an "endless loop" or "vicious circle". This cannot be resolved on the level of formulation, consequently, it can only be resolved in a higher level meta-language.

If we have a "p" proposition the truth of which is undemonstrable in a given system, the question arises: is its truth undemonstrable in all other systems? No. We can always find a system in which the truth of proposition "p" is demonstrable, but we must build up that particular system. In other words, the shift from one system to another is the criterion of making any truth demonstrable. Or, vice versa, there is no system which encompasses all truths.

3. The Gödelian question

Generalising, we could say that whenever we come across a contradiction, we have to do with a Gödelian question in a sense. Therefore the Gödelian question concerns the contradictory truth-values of propositions. However, we must point out that demonstrability also has a role in the Gödelian question: the truth-values of propositions contradict each other on a certain basis and propositions are grounded in a given system. Systems can be considered to be built up according to strict and clear rules, but a more intuitive approach is also possible. For example, the system of everyday knowledge structured into life-worlds (*Lebenswelt*) can also be considered a system, in a sense. Therefore if we would like to formulate a rough definition of the Gödelian question, we would say:

We encounter the Gödelian question in situations in which we cannot decide, on a certain basis, whether a proposition is true or false and thus we must accept both truth-values or neither of them.

We can see that this definition contains the concept of acceptance besides the issue of undecidability. What does this mean? The concept of acceptance is a concept of relation, denoting the relation of the accepted, the acceptor and acceptance. The accepted is the discovered contradiction itself, the acceptor is the individual in different situations whereas the relation of acceptance means the integration of the statement of the proposition into already existing knowledge so that it does not come into contradiction and is not "dissonant" with already existing knowledge. We must underline that we have to do with a contradiction which is *discovered*, that is, the realisation (recognition) of the contradiction is the criterion of the existence of the Gödelian situation. Why? Because people are not always conscious about the existence of the contradiction and therefore they do not know that they face an undecidable question. They often disregard it or take it for granted.

4. Gödelian questions

What other Gödelian questions are there, outside the field of mathematics and logic? D.R. Hofstadter tries to map Gödelian questions in the somewhat strange trio of a mathematician, artist and composer in his book entitled *Gödel, Escher, Bach* (Hofstadter D.R., 1979). He analyses the formation of contradiction in these three fields and the way our perception gets into an endless loop; he also writes about the way of interpreting Escher's drawings so that paradoxes viewed from a higher level are resolved and create a sense of beauty.

Going along this way he identifies other Gödelian questions too, such as the Gödel theorem of molecular biology: "For every cell there is a DNA molecule which, should it enter the cell, it would cause the production of a protein which would destroy the cell and thus prevent the cell from reproducing this DNA." (Hofstadter D.R., 1979, 536.) Molecular biologists would not be very surprised by this formulation, because it is a Gödelian situation which is not necessarily recognised by them. The meaning of this formulation is therefore that if the cell reproduces itself, it does not in fact reproduce itself because it also creates the mechanism which prevents its reproduction. This is obviously a paradoxical situation and treating it as a Gödelian question is not surprising at all.

The Gödel theorem of society can be formulated similarly: "...even in completely formally formulated social systems there are completely normal people who are not allowed by the system to manifest themselves. We could also say in a high-flown way that history does not have a solution. The issue of social systems cannot have an intellectual framework which guarantees perfect agreement; similarly, evolution cannot be properly analysed unless we do not abandon the conceptual frameworks promising final solutions." (Mér✱ L., 1989, 235.) This theorem states the impossibility of public welfare. There are no social systems which guarantee the welfare of every individual, or, if the society wants to ensure the well-being of every individual then the social system itself must be changed. This formulation makes perhaps clearer the mechanism of history although history "does not have a solution".

Finally I will present a Gödelian question characteristic to the Romanian educational system of this transitional period. The paradoxical situation of Romanian education is described by Denizia Gál in her PhD dissertation (Denizia Gál, 2000). According to the author "there is a huge gap between the level of pupils' knowledge and examination requirements (p.91). The reason for this is that education is aimed at "masses", it is not differentiated and even less individualised." (p.91). Furthermore, the question arises: "...is this situation not created and maintained by the Romanian educational system itself, through its very forms of activity?" (p.91) To make the contradiction clear: the Romanian educational system of this transitional period does not provide pupils with the knowledge that is demanded by the same system at the examinations. In a reverse, equivalent formulation, preparing students for examination requirements needs a different type of education.

5. The Gödelian question of everyday life

We will start from the concept of "life-world" (Lebenswelt) which has its origins in phenomenological sociology. We will use it in the meaning conferred to it by A. Schütz. (Schütz, A., 1962). It is quite difficult to define this concept. Ostensibly we could say that life-worlds are such as the world of physicists, the world of housewives, but we can also speak about the world of women and the world of men. What are the characteristics of these worlds? First of all, they point to the grouping of people into classes. They can be identified according to a certain structure of social values and norms, a certain system of attitudes, a certain way of thinking and a certain language usage.

Everyday life is the most comprehensive life-world which is in fact characteristic to every single individual. The concept of everyday life is again difficult to define. First of all it serves survival, contains habits of eating and dressing, keeps a record and celebrates the main events of an individual's life in a certain way. We can distinguish communities and individuals by their everyday language usage. Experience is the main form of theorising in everyday life: proverbs and sayings are the most important expressions of this experience.

Can we come across the Gödelian questions in the world of everyday life too? In order to answer this question we will resort to proverbs, the main forms of theorising everyday life. Proverbs accompany traditional society in the first place. Their main role is to enhance the recognition of Gödelian questions in instances of understanding and acting; they also direct the handling of these situations on account of their normative role. The instances of understanding and acting are various, therefore their theorisation is also varied.

We used a Dictionary of Proverbs (Lefter, V., 1979) to show the process of theorisation. The keyword of proverbs is one of the classification criteria in this dictionary: friendship, money, God, learning, men, women, animals, etc. We have chosen some of these proverbs in order to identify Gödelian questions.

Let us consider proverbs about richness:

The rich are meaner than the poor.
Poverty is in want of much, avarice of everything.
The pleasures of the mighty are the tears of the poor.

If we were to decide on the basis of these proverbs whether to be rich or poor, we would be at a loss. Proverbs give contradictory pieces of advice.

Here are some proverbs about wives:

He that hath a white horse and a fair wife, never wants trouble.
Who hath a fair wife needs more than two eyes.

These two proverbs do not help us in choosing a wife: we would not know whether to choose a fair or an ugly wife.

One more example with money:

Money will do anything.
One hand will not wash the other for nothing.
A gentleman without money is like pudding without suet.
There is no companion like the penny.
Lay up against a rainy day.
Money is the devil's eye.

The first five proverbs highlight the value of money from different perspectives while the sixth proverb questions this value and underlines that money is worthless. Which of these proverbs is true? Which of them is authoritative in instances of understanding and acting? If we think about it, we will see that money cannot be considered valuable only or worthless only. We must accept the "joint" truth of these two contradictory types of proposition. The definition of Gödelian questions also points to this. We must also underline that the acceptance of contradiction holds good for all groups of contradictory proverbs, those about richness, wives and money. Does this mean that we go beyond the framework of the model of rationalism of European culture? It seems so. From this point of view, we are in the field of the irrational.

How is the existence of Gödelian questions possible in proverbs and in more general terms, in everyday life? We have already mentioned the variety of everyday life. Proverbs which theorise this variety are also varied. The assertions of everyday life are expressed by different, moreover, contradictory propositions with different truth-values. Is there a moral principle concerning our assertions? So far, logic has not set up a moral principle concerning assertions. Thus, anything can be asserted, we can even have contradictory assertions. These can be accepted on account of the diversity of instances of understanding and acting in everyday life. Proverbs enter our lives with the claim to universality and they can only do this if they are contradictory. Contradiction is the condition for all truths to be encompassed by this form of theorising.

BIBLIOGRAPHY

1. Gál, D., *Şcoala şi mobilitatea* (*School and Mobility*) (manuscript).
2. Gál, L., *Nyelv és logikusság* (*Language and Logicality*), Pro Philosophia, Cluj, 2000.

3. Gál, L., *Bevezetés a logikába* (*Introduction to Logic*), Presa Universitară Clujeană, Cluj, 1999.
4. Gál, L., *Translation and Logical Sense in the Dictionary of Proverbs*, in: *Philobiblon*, vol.III, nr.1-2, 1998, p.138-154.
5. Mérő, L., *Észjárások* (*Ways of Thinking*), Akadémiai Kiadó-Optimum Kiadó, Budapest, 1989.
6. Kneale, W., Kneale, M., *A logika fejlődése* (*Development of Logic*), Gondolat Kiadó, Budapest, 1987.
7. Enescu, G., *Dicționar de logică* (*Dictionary of Logic*), Ed. Științifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.
8. Nagel, E, Newman, J.R., *A Gödel bizonyítás* (*The Gödelian Proof*), in: Copi, I.M., Gould J.A. (eds), *Kortárs tanulmányok a logikaelmélet körébol* (*Contemporary Readings in Logical Theory*), Gondolat Kiadó, Budapest, 1985.
9. Hofstadter, D.R., *Gödel, Escher, Bach*, Basic Books, 1979.
10. Lefter, V., *Dictionar de proverbe român-englez* (*Romanian-English Dictionary of Proverbs*), Ed. Științifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1978.
11. Dumitriu, A., *History of Logic*, vol.IV, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, 1977.
12. Schütz, A., *Collected Papers*, Nijhoff, The Hague, 1962.

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

ON SOME DIFFICULTIES OF ASSUMING EXISTENCE IN LOGIC (I)

DELIA POPESCU

Summary

The ideatic trajectory of this paper is circular, in the sense that it starts with a general frame concerning the existence of logical objects as classes /sets, concepts, quantifiers etc., as it can be found in one of Godel's studies, goes through some instances of logic's discourse involving the assumption of existence (as formalization of the natural language modern syllogistic models, quantification, theory of sets, etc.), advances a possible quantitative view able to avoid some (at least) difficulties implied by the existential import of some perspectives, and finally it returns to the broad frame concerning the existence of logical entities in the view of Godel's ideas.

Analyzing Russell's mathematical logic, Godel[1] underlines from the beginning, Russell's pronouncedly realistic attitudes, on the one hand, as they were stated in Russell's **Introduction to Mathematical Philosophy** (ed. 1920, p. 169): "Logic is concerned with the real world just as truly as zoology, though with its more abstract and general features."; on the other hand, the gradual decreasing of this attitude in the course of time, this being always stronger in theory than in practice.

Russell's realistic commitment is reflected as well in his rejection of the existence of class or concept, in general. The problem here is, according to Godel, to determine under what further hypotheses these entities do exist.

The two possible directions in which one may look for such a criterion were called by Russell the zig-zag theory and the theory of limitation of size, respectively (Godel calls them the intensional and the extensional theory and points out that the most characteristic feature of the second , as opposed to the first, would consist in the non-existence of the universal class or, in the intensional interpretation, of the notion of "something" in an unrestricted sense[2].

Neither of the two afore-mentioned directions pointed out by himself were not followed by Russell in his own subsequent work concerning the solution of the paradoxes. A more radical idea was the basis of this work, namely the "no-class theory," according to

---

[1] Godel notes the fact that the above quoted passage was left out in the later editions of the **Introduction**. See Godel, Kurt, "Russell's mathematical logic," in Benacerraf, P. and Putnam, H., editors, **Philosophy of Mathematics. Selected Readings**, second edition, Cambridge University Press.

[2] *Ibidem*, pp. 452-453.

which classes or concepts never exist as real objects. Consequently, the occurrence of such terms in sentences made the latter meaningful only to such an extent as they can be interpreted as a "facon de parler," a manner of speaking about other things[3].

At this point, Godel affirms a, opposed idea, according to which classes and concepts "may, however, also be conceived as real objects, namely classes as "pluralities of thing" or as structures consisting of a plurality of things and concepts as the properties and relations of things existing independently of our definitions and constructions.(...) It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory system of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions and in both cases it is impossible to interpret the propositions one wants to assert about these entities as propositions about the "data," i.e., in the latter case the actually occurring sense perceptions."[4]

Two are the reasons advanced by Russell against the extensional view of classes, namely the existence of 1) the null class, which cannot very well be a collection, and 2) the unit classes, which would have to be identical with their single elements. For Godel, Russell's arguments just mentioned are insufficient to affirming the idea that all classes are fictions, as Russell intended to do; in Godel's view, "all these arguments could, if anything, at most prove that the null class and the unit classes (as distinct from their only element)are fictions (introduced to simplify the calculus like the points at infinity in geometry), not that all classes are fiction." [5]

The problem of paradoxes is, in Godel's view, the cause of the pronounced tendency to build up a logic without the assumption of the objective existence of such entities as classes and concepts, which led to the formulation of the "no-class theory." A logical consequence of this standpoint is the later inclusion of propositions in this scheme, especially those including quantification (as objectively existing entities, universal propositions evidently belong to the same category of idealistic objects as classes and concepts, leading, if admitted without restrictions, to the same kind of paradoxes).[6]

Which would be the philosophical relevance of such a theory as Russell's "no-class theory"? Godel's reply is as follows: " This whole scheme of the no-class theory is of great interest as one of the few examples, carried out in detail, of the tendency to eliminate assumptions about the existence of objects outside the "data" and to replace them by constructions on the basis of these data."[7]

---

[3] *Ibidem*, p. 453

[4] *Ibidem*, pp. 456-457.

[5] *Ibidem*, p. 459.

[6] *Ibidem*, p. 460.

[7] *Ibidem*, p. 460. In the footnote 22 Godel mentions that the "data' are to be understood in a relative sense here, as logic without the assumption of the existence of classes and concepts.)

AN ALTERNATIVE TO RUSSELL'S NOT EMPTY UNIVERSE: LESNIEWSKI'S ONTOLOGY

"*It is often said by its advocates that ontology is an answer to an early prayer of ussell's.*"[8]

The theorem *24.52 from **Principia Mathematica** asserts that the universal class is not empty, that means that it there is at least one individual. In a footnote to his **Introduction to Mathematical Philosophy** this theorem is described as "a defect in logical purity."[9] There is not such a "defect" in Lesniewski's ontology, an ontology compatible with an empty universe.

Analyzing comparatively the problem of existence in the two above-mentioned authors, A. Prior stresses that the explanation usually given to this achievement of the latter author's ontology is puzzling, describing the lowest-type variables of ontology as standing for names, like Russell's lowest-type variables. But this explanation ignores the fact that whereas Russell's lowest-type variables stand for singular names only, Lesniewski's stand equally for empty names, singular names and plural names: "Existence is therefore something that can be significantly predicted with an ontological "name" as subject - "*a* exists" is a well-formed formula"[10] that can be true or false.

What Prior intends to prove by his analysis is the fact that Lesniewski's ontology is just a broadly Russellian theory of classes deprived of any variables of Russell's lowest logical type; ontology's so-called "names" are not individual names in the Russellian sense, but class names. One feature of Lesniewski's so-called "names" which seems to Prior to tell quite conclusively in favor of interpreting them as class-names is that they can be logically complex. If in Lesniewski's ontology we can construct a name which is logically empty (as the compound name "a and not-a"), in Russell's case, there is nothing out of which you can construct individual names, they are not just an appendage with no real importance for the whole system; on the contrary, Russell regards classes as logical constructions out of individuals and functions of individuals and thus affirms, so to speak, two kinds of language: a primary and a secondary one. The basic sentences of Russell's class language are of the form "x ε α", a form that asserts the membership of an individual to a class, and these x's, as individual names, are just not dispensable.[11]

In Lesniewski, ε is introduced as an undefined constant expressing this time a relation between classes; what it expresses is not Russellian class-membership, but rather the inclusion of a unit-class in another class (Prior admits at this point that Lesniewski did not like this interpretation; though, no other interpretation seems intelligible to the former).

Returning to the theorem considered as a defect in logical purity, Prior holds that the interpretation of Russell's lowest-type variables as standing for individual names is responsible for this "infection"; the assumption that there are complete statements of the

---

8 See A. Prior, "Existence in Lesniewski and in Russell," in Crossley, N. and Dummett, M.A.E., editors, **Formal Systems and Reccursive Functions**, 1965, North Holland Publishing Company, Amsterdam, p. 149

9 *Ibidem*, p. 149

10 *Ibidem*, p. 149

11 *Ibidem*, pp. 150-151.

form "fx,"where x is a symbol of this kind, already involves the non-emptiness of the universe.[12]

How could one purge logic of this assumption? According to Prior, one way to attain this goal is to conceive quantification theory "as being concerned simply with the application of quantifier functions with their arguments, without regard to what parts of speech these functors and arguments are."[13] The interpretation of Russell's lowest type variables as standing for Lesniewski's "names" (=class-names) and his predicates as functors forming sentences out of these would not, according to Prior, change the form of quantification theory. Moreover, the advantage of this form is that it carries no existential implications, since an "a" could be an empty class (...).

From the first moment of contact with the problem of interpreting the logical status of universal and particular statements I was struck by the fact that though (some) universal statements containing empty terms as subjects could be evaluated as true statements, the particular statements corresponding to these types by conversion are no longer true. The example I was given in an introductory course was this: *All perpetuum mobile are machines*. Though there is no *perpetuum mobile*, the proposition having this subject is considered true, but its converse, *Some machines are perpetuum mobile* is no more true, because the term *machine* is not an empty term and, as the subject of the latter proposition, it implies the existence of something non-existing.

This was the way I was explained, but it does not seem a satisfactory one. Of course, a way of escaping the problem is to interpret the universal statements above mentioned as a conditional one, i.e., as *If there are perpetuum mobile, they are machines*, and its converse as *If some machines are perpetuum mobile, then there are perpetuum mobile*, otherwise the relation of equivalence between the first proposition and its converse do not hold any more. I think this type of statements are not to be considered as exceptions and the cause of this problem lies in an inconsequence in interpreting differently, but in the same context / frame, the same word: *is*, respectively *are.* Here I try to approach the problem of existential import so often (but not always on good grounds) connected to the particular proposition or to the existential quantifier as well and its consequences in some situations concerning the logical translation of these statements in the language of propositions, predicates, and class / set theory. I think this inconsequence (which is not separated from an intensional intrusion in analyzing the formal aspect of propositions) is responsible for some lacks of modern syllogistic models and it can be relatively easy to remove from a extensional, quantitative perspective on this topic.

I. Propositional models and the assumption of existence

I.1. The Lukasiewicz model or the standard axiomatisation of modern syllogistic

Proved as complete and non-redundant, this model is used as the standard in evaluating the other models. Its axioms, especially the last one in its derived form, reflect a way of surpassing the problem of testing those direct syllogism, known as valid from the classical theory, which have two universals as premises and a particular as a conclusion:

S1: (MaP • SaM) → Sap

[12] *Ibidem*, p. 152.
[13] *Ibidem*, p. 153.

S2: (MaP • MiS) $\rightarrow$ SiP
S3: SaS or S'3: SiP$\rightarrow$PiS
S4: SiS or S'4: SaP$\rightarrow$SiP.

S4 or S'4 respectively represents the controversial part of syllogistic[14], i.e., the passing from universal statement to particular ones, taking into account the claim of modeling in a complete and non-redundant manner the classical theory of inference.

The system contains as well two definitions (D1: SeP = ~SiP; D2: SoP = ~SaP), two rules of inference (the rule of detachment and the rule of substitution) supplemented by two rules of rejection corresponding to each of the former rules, all of these conferring the system completeness and non-redundancy (it should be added that the system contains two supplementary axioms concerning the obversion of universal propositions and two counter-axioms that must be non-validated in order to avoid redundancy).

I.2. Simple propositional models

Though we are said that it seems quite natural[15] to translate the universal proposition into implications: SaP becomes s$\rightarrow$p, SeP: s$\rightarrow$~p, SiP: s•p, SoP: s•~p, it is not difficult to notice that, though the contradictory relations preserved, the relation of subalternation from the logic square is no more found as a valid inference (s$\rightarrow$p does no more imply s•p). This type of so called "natural" translation leave aside a good portion of what these statements say in the natural language or even in their classical transcription. The existential import attributed to the particular proposition is reflected in the conjunction (a functor stronger than the implication) used to transcribe the original relation into this propositional language. Tested by the standard model above presented, this model proves to be incomplete, because it does not verify S4. Then, its validity is restrained to the "absolute syllogistic", leaving aside the inferences that derive particular conclusion from universal premises[16]. The completeness of this model can be assured by adding a premise that stipulates *the existence* of objects in the classes s or p, the type of it being exactly the forth axiom, SiS. But this *stipulation of existence* means to step outside the field of logical assumptions, to say more that one can say from a strictly logical perspective[17]. Even though, not all the difficulties are avoided this way, because the system proves to be redundant, i.e., it validates syllogistic structures known as being invalid.

In fact, this modern interpretation of propositions assumes their heterogenity, the universal ones having a hypothetical nature and the particular one - an *existential* nature[18]. Moreover, transcribing the particulars into conjunctions means to ignore the type of relation the propositions SiP reflect (a reflexive, symmetric and transitive one), which is not the case regarding the relation expressed by conjunction (a reflexive, symmetrical and *non-*

---

[14] Cf. Didilescu, I. and Botezatu, P., **Silogistica. Teoria clasic¾ ¿i interpret¾rile moderne**, EDP, Buc., 1976, p. 226.

[15] *Ibidem*, P. 235: "*În mod cu totul firesc sîntem condu¿i la ideea de a exprima propozißiile universale prin implicaßii ¿i propozißiile particulare prin conjuncßii.*"

[16] For more details, see *ibidem*, pp. 235-240.

[17] *Ibidem,*p. 240: "*O asemenea premis¾ introduce un element cu totul str¾in în corpul silogisticii. Premisa existenßial¾, SiS, nu este de tip silogistic, iar asertarea existenßei unor obiecte nu este de resortul logicii*".

[18] *Ibidem*, p. 238.

transitive one!)[19]. In this respect, A. Menne proved the impossibility of representing the syllogistic functors (A, E, I, O) by bivalent dyadic propositional functors[20]

I.3. The Sayre model

In fact, the eight situations described by this model represent the eight different spatial intervals determined in a given universe of discourse by three classes. These eight intervals can be easily seen by using the Wenn diagrams. This approach is, I think, much closer to an extentional interpretation of propositions and thus much freer from existential assumption. Moreover, the translation of syllogistic propositions is made by appealing to the law of expansion of a class to another class.[21] Only the presence of the determination reflected by the word *something* could rise the question concerning the existence or the kind of existence of objects it supposed, the form of statement being closer to a kind of particular proposition. In other words, what really means this *something*? Which would be the criteria of determining whether something *is* or *is not* in a certain way? I think that this difficulty is caused (partially at least) by a kind of extra-logical interpretation. Strictly logically speaking, what really counts here is the interval we are referring to. So:

1) Something is A and B and C.
2) Something is A and B and non-C.
3) Something is A and non-B and non-C.
4) Something is A and non-B and non-C.
5) Something is non-A and B and C.
6) Something is non-A and B and non-C.
7) Something is non-A and non-B and non-C.
8) Something is non-A and non-B and non-C.

Thus, the affirmative particular proposition, meaning that *something is A and B an C or something is A and B and non-C*, becomes a disjunction, namely 1) v 2); as a negation of the proposition I, the proposition E becomes a conjunction, namely ~1)•~2); AoB, meaning that *something is A and non-B and C or something is A and non-B and non-C*, is represented by a disjunction, namely 3) v 4); finally, AaB, as the negation of AoB, is represented by a conjunction, namely ~3) • ~ 4).

The syntactic testing of this model proves it valid just in the frame of absolute syllogistic, so it is incomplete. In order to be complete, it has to be supplemented (in the case of syllogisms with both universal premises and a particular conclusion) with a new one, having the form *something is A/B/C.* Only by this artifice of a supplementary premise the model is proved to be complete (it proves to be non-redundant even without this supplementation).

Why is this supplementary premise necessary? I think the lack of completeness lies in the fact that the universal propositions are considered thus far only as the contradictories of the corresponding particular ones. Again, the subalternation from the classical square is omitted. Or precisely by taking into account, but putting aside any

[19] *Ibidem*, p. 239.

[20] It is about the "strong" theorem demonstrated by Menne, according to which none of the syllogistic functors are truth functors, as the latter ones are found in Wittgenstein's table. See more about this in *ibidem*, p. 242.

[21] For more about this model, see *ibidem*, pp. 247-250.

existential import for the particulars, this rapport one can get closer to an adequate transcriptions of the categorical propositions.

Of course, beside this supplementation, the simple propositional models represent a kind of dead end, as far as it cannot appeal to a quantification. This failure has, though, a theoretical importance, showing that the syllogistic system has a heterogeneous structure compared to the logical system of propositional calculus.[22]

II. THEORY OF PREDICATES

Usually, statements as *Anything is…/ Nothing is…, Something is…/Something is not…* are transcribed in this frame the following quantificational expressions: $(\forall x)$ Fx / $(\forall x) \sim$ Fx, respectively $(\exists x)$ Fx / $(\exists x) \sim$ Fx. Put in a logical square, contrariety, contradiction and subcontrariety are preserved, under no existential condition. This is not the case for subalternation, if one interprets the existential quantification as expressing true propositions if and only if *there is* at least an individual, let us call it *a*, in the given universe and F*a* is true.

The presence of existential assumptions in this case is expressed by the condition of considering the universe of having at least one individual, i.e., that it is a non-empty one: "*If we grant that there is at least one individual in the universe then every propositional function has at least one substitution instance (true or false). Under this assumption, if the universal quantification of a propositional function is true, then its existential quantification must be true also.*"[23]

For the propositions A,E, I, O, a more adequate translation seems to be the next: $(\forall x)$ (Sx$\rightarrow$ Px), $(\forall x)$ (Sx $\rightarrow \sim$ Px), $(\exists x)$ (Sx$\bullet$ Px), $(\exists x)$ (Sx$\bullet$ ~Px), respectively. Now what is maintain from the square of categorical propositions is just the rapport of contradiction, even under the assumption of a non-empty universe:
"*But none of the other relationships discussed in connection with the square array on page 75 hold for the traditional A, E, I and O propositions, even where we assume that there exists at least one individual in the universe*."[24]

Only if we make the assumption that there is at least one individual in the universe, then '$(\forall x)$ (Sx $\rightarrow$Px)' does imply '$(\exists x)$ (Sx $\rightarrow$ Px)'; the problem is now the fact that the latter expression is not an I proposition. Symbolized as '$(\exists x)$ (Sx$\bullet$ Px)', the proposition I asserts that there is at least one thing having both the property S and the property P, while the proposition '$(\exists x)$ (Sx$\rightarrow$ Px)' asserts only that there is at least one object which either has the property S or does not have the property P, "*which is a very different and much weaker assertion*."[25]

The problem of existence in logic is attentively approached by C. Lejewski[26] in the context open by Lesniewski's ontology. Starting from the possibility of asserting or rejecting propositions like (1) *electrons exist*, (2) *minds exist* or (3) *Pegasus exists*, he states

---

22 Cf. *ibidem*, p. 251.

23 Copi, I.M., **Symbolic Logic**, third edition, The Macmillan Company, New York; Collier-Macmillan Limited, London, p. 74.

24 *Ibidem*, p. 77.

25 See *ibidem*, p. 78.

26 See C. Lejewski, *Logic and existence*, in Srzednicki, J.T.J. and Rickey, V.F., editors, **Lesniewski's Systems**, 1984, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague / Boston / Lancaster; Ossolineum, Wroclaw – Poland.

that our hesitation can be traced to twofold causes: one is the lack of certainty concerning the meaning of the words as ‘electrons’ or ‘minds’, or the lack of understanding of words as ‘Pegasus’; the second cause concerns the meaning of the term ‘exist(s)’: "*It is the latter cause of our embarrassment that calls for closer attention (...) The logician’s task, as I understand it, will be to establish the meaning of the constant term ‘exist(s)’ as it occurs in the function ‘x exist(s)’, where ‘x’ is a variable for which any noun-expression can be substituted*."[27] What the author proposes here as a solution to the problem of quantification is an unrestricted interpretation of quantifiers; under this interpretation, "*every component of an expansion contains an expression of which we can only say that it is meaningful noun-expression. It may designate only one of the objects belonging to the universe, it may designate more than one, or it may designate nothing at all*."[28] Moreover, according to this interpretation, existential quantifications have no existential import at all. The merging of the idea of quantification with the notion of existence that characterizes the theory of the restricted quantification "*has put the logicians and philosophers on a wrong track in their endeavours to elucidate the problem of existence in logic*."[29]

III. SET THEORY AND THE PROBLEM OF EXISTENCE

The definition of set adopted here is one belonging to the theory of sets developed in an intuitive manner:
"*By a* set *we mean any kind of a collection of entities of any sort. Thus we can speak of the set of all Americans, or the set of all integers, or the set of all Americans and integers, or the set of all straight lines, or the set of all circles which pass through a given point*."[30]
Terms as ‘class,’ ‘collection,’ ‘aggregate’ are synonyms in this context with ‘set. ’

The empty set is defined as the set with no members and it is the only set included in the empty set and in any other set.

Approaching the problem of translating everyday language in the set language, Suppes[31] points out the difference between universal and particular statements, assuming an existential value of the latter. Thus, if universal statements are to be symbolized, taking into account the relation they express, as the inclusion of a set into another set (e.g., *All men are mortals*) or as the membership of a set to another set (e.g., *Men are numerous*), a statement of the form "Some...are..." means that there exists something which is described by both terms, i.e., that the corresponding sets is not empty. The problem of existence appears here again, as the statement of the previous form "*implies that the sets corresponding to subject and predicate are not empty, no such inference is to be drawn from a statement of the form of (1)*,"[32] where (1) is of the form of *All Americans are philosophers*. So, according to the same author, it is true that *All three-headed, six eyed men are three-headed men*, but it is not true that *Some three-headed, six-eyed men are three-headed men.* If the older logic

[27] *Ibidem*, p. 45.
[28] *Ibidem*, p. 51.
[29] *Ibidem*, p. 54.
[30] Suppes, P., **Introduction to Logic**, Venn Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne, p. 177.
[31] *Ibidem*, p. 191.
[32] *Ibidem*, p. 191.

allowed the inference of ‘Some S are P’ from ‘All S are P,’ modern logic differs in this point from the former, as the example shows as well.

INSTEAD OF PARTIAL CONCLUSIONS

What we managed to make thus far was to sketch some aspects of the problem of existence in logic that could and should be further developed and eventually integrated in a general theoretical frame.This is to be the task of the second part of this paper.

We have seen that in translating everyday language into a formalized logical language one should take into account the logically relevant feature of the natural language expressions, on the one hand; on the other hand, we have seen that this operation is often embarrassed by the assumption of existence concerning some type of statements (i.e., the particular propositions) or quantifiers (in the case of the existential quantification). We think that by assuming the existential import of some expressions one operates illegitimately by using two criteria in the same classification.

The existential import could and should be avoided, we think, by approaching the question from an extentional perspective (of set/class theory), asserting that the passage from "All x are..." to "Some x are..." involves no existential difference, but a quantitative one. In other words, a return to the old classic axiom of *dictum de omni et nullo*, would help us to reframe this problem in an ontologically neutral ("free") way. Thus from the assumed truth of a universal proposition one may validly infer the truth of the corresponding particular proposition by the simple mechanism of passing from the whole to its part(s) (whenever, of course, the relation between subject and predicate is an inclusion and not one of membership).

Moreover, from this perspective, one has not, regarding the problem of validity, to avoid taking into account the possible occurrence of the empty terms (i.e., the empty set on formalized level) in some statements, as far as one is not interested in the problem of establishing the criteria of truth of these statements (this is a problem that, properly speaking, is not a logical, but an epistemological one), but in the problem of sheer inferential validity. This can be easily seen by analyzing the class models of syllogistic: the problematic cases of syllogisms containing universal premises and a particular conclusion is no more problematic as far as a universal statement translated either into $A\subset\sim B$ or $A\subset B$ (in an inclusional manner) or into $A\sim B=0$ or $AB=0$ in a Boolean manner (this transcription is to be further developed by applying the law of expansion in order to include the all three terms of a syllogism in each case) can also be translated as a corresponding particular one. In fact, that is what the supplementary premise necessary to these ‘problematic’ cases does (otherwise the model lacks completeness). But, as we have seen, this kind of supplementation is often considered an artifice one appeals to in order to save the completeness of the model, which is no more the case when situating in the more extentional view we try to plead for here and especially in the second part of this paper.

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

DECIDABIL ŞI INDECIDABIL ÎN PERSPECTIVA ANALIZEI SITUAŢIONALE

PETRU IOAN

Derivat din latinescul *decidere,* românescul *a decide* şi corespondenţii săi în limbi de circulaţie (franţuzescul *décider*, englezescul *decide*, sau nemţescul *entscheiden*) înseamnă *a trasa* / *a determina* / *a lua o hotărîre* (sau *a hotărî*), a soluţiona, a determina, a convinge, a decreta ceva etc. Pe cale de consecinţă, prin derivatul *decidabil* se va înţelege, prin urmare, ceea ce *poate fi hotărît*, ceea ce *se poate soluţiona*, ceea ce *este determinabil* etc., iar opusul său, *indecidabil*, va da seamă de ceea ce *nu se poate hotărî* şi, tot astfel, de ceea ce *nu are soluţii* şi *nu este determinabil*.

Problema, ca atare, *a deciziei*, este intrinsec legată de ideea *algoritmului* [1] şi s-a impus în cîmpul matematicii: prin reguli de operare cu întregii; prin reguli de obţinere a celui mai mare divizor comun şi al celui mai mic multiplu comun; prin reguli ce ne permit să aflăm dacă ecuaţia *diofantică* "$ax + + by + c = 0$" are ca soluţii numere întregi, atunci cînd coeficienţii ("a", "b" şi "c") sînt ei înşişi numere întregi; prin reguli care ne ajută să determinăm rădăcina întreagă (dacă ea există) în cazul ecuaţiei algebrice "$a_0 + + a_1x^1 + \dots + a_nx^n = 0$" cu coeficienţi ("$a_0$", "$a_1$", … , "$a_{n-1}$", "$a_n$", pentru "$n$" − număr întreg, iar $a_n \neq 0$); prin reguli de calculare a celui de al n-lea număr prim; prin reguli de soluţionare a ecuaţiilor cubice, ori a celor de gradul al patrulea [2] şi aşa mai departe.

Din aritmetică şi din algebră, iar apoi din geometrie şi din celelalte ramuri ale matematicii, problema găsirii unor algoritmi s-a amplificat ca problemă a *standardizării* gîndirii umane, suprapunîndu-se − într-o oarecare măsură − cu evoluţia logicii matematice, chiar dacă, pe acest teren, ea va fi abordată, în modul cel mai explicit, în legătură cu *sistemele formale*, abia spre sfîrşitul veacului al XIX-lea, prin preocupările lui Charles Sanders Peirce [3], ale lui Gottlob Frege, Ernst Schröder, Leopold Löwenheim, Thoralf Skolem, Jan Lukasiewicz, sau Emil Post, pentru a deveni "problema de bază" a logicii mate-

---

[1] De la numele matematicianului şi astronomului arab Mohammed Ibu-Musa al Chwarizmu (sau al-Chowarizmi), născut la 780 şi mort la 850, autor al tratatului *Al-Jabr* (de Algebră !), pe la 830.

[2] H. P. Sankappanawar, *Decision Problems: History and Methods*, in: Ayda I. Arruda, Newton C. A. da Costa & Rolando Chuaqui, *Mathematical Logic: Proceedings of the First Brazilian Conference,* Marcel Dekker, New York, Basel, 1978, pp. 4 sqq.

[3] Un studiu publicat de marele gînditor în volumul 3 (pp. 15 - 57), pe 1880, al prestigioasei publicaţii "American Journal of Mathematics" (ne referim la: *On the Algebra of Logic*), are o secţiune (II.2) semnificativ intitulată: "The Resolution of Problems in Non-relative Logic", prin care autorul transatlantic îşi propune să completeze metodele de rezolvare a problemelor din logica termenilor absoluţi, datorate lui George Boole, William Stanley Jevons, Ernst Schröder şi Hugh McColl, printr-una "mai simplă" şi "mai naturală". Cf.: Charles Hartshorne and Paul Weiss (eds.), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, III - IV, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1933, pp. 133 sqq.

matice o dată cu celebrele *Principii de logică teoretică*, asigurînd o foarte succintă şi foarte consistentă prezentare a logicii formalizate, prin David Hilbert şi Wilhelm Ackerman [4]. Cum logica matematică este astăzi parte responsabilă în febrila procesare a *inteligenței artificiale*, iar interfața între limbile *naturale* şi cele *formale* (mai mult sau mai puțin "caracteristice" în sensul pe care şi-l dorise Leibniz !) capătă o importanță de prim ordin, socotim că este momentul să aducem discuția despre *decizie* şi *decidabilitate* într-un cadru *semiotic* de maximă cuprindere. Ne încurajează spre o astfel de tentativă rezultate promițătoare ale experimentării unui model de complexitate mediană în analiza situațiilor acționale [5].

1. DECIDABIL ŞI INDECIDABIL, DIN PUNCTUL DE VEDERE AL SUBIECTULUI TERȚ ŞI AL (INTER)LOCUTORILOR POSIBILI

Plecînd de la asumpția că problema deciziei este una eminamente *semio-logică*, vom constata că ea capătă aspecte şi dimensiuni specifice pentru fiecare *pol* (sau *parametru*) al situațiilor de comunicare, după cum ni se înfățişează: ☞ (1) ca problemă *a codului* (*"S"*) în care este articulat mesajul (dacă despre *mesaj* şi despre *cod* poate fi vorba în cazul unui *semnificant virtual* oarecare !) – în ce limbă va fi fost scris sau formulat un mesaj oarecare ? / în ce limbă se exprimă cei în preajma cărora se întîmplă să mă aflu ? / se leagă cele exprimate în paginile parcurse, ori în secvențele electronic-consemnate ? / au sens rîndurile urmărite într-o limbă sau alta ? / există şanse ale (re)descifrării mesajului studiat ? / etc.; ☞ (2) ca problemă a *intensiunii* (*"I"*) – ce exprimă textul în atenție ? / care este subiectul (tema, ori ideea principală a) textului ? / ce înțeles se poate conferi parametrului discursiv supus analizei ? / etc.; ☞ (3) ca problemă a *denotației* (*"D"*) – la ce se referă (ce evenimente relatează, transfigurează, parodiază etc.) textul în atenție ? / unde şi cînd se întîmplă cele consemnate ? / în ce împrejurări s-au petrecut evenimentele înregistrate ? / unde şi cînd a fost compus discursul (sau a fost articulat mesajul) în atenție ? / etc. ☞ (4) ca problemă a *emisiei* (*"E"*) – cine este autorul textului ? / cine a scris (a compus, a expediat, a transpus, a parodiat, a pictat, a sculptat, a formulat, a tradus, a codificat etc.) mesajul ? / de la cine se aude strigătul perceput ? / cui îi aparține cutare

---

[4] Gottlob Frege, *Begriffsschift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Nebert, Halle, 1879; Ernst Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, vol. III (*Algebra und Logik der Relative*), partea 1, Leipzig, 1895; Leopold Löwenheim, *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, "Mathematiche Annalen", Bd. 76, 1915, pp. 447 - 479; Thoralf Skolem, *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations-und Summations-probleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen*, "Skrifter Vidensk Kristiania Math-Naturaid", Kl. nr. 13, 1919, pp. 1 - 37; Emil Post, *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*, "American Journal of Mathematics", 43, 1921, pp. 163 - 185; Jan Lukasiewicz, *O logice trójwartósciowej (Despre logica trivalentă)*, "Ruch filozoficzny" (Lwów, Torun), 5, 1920, pp. 169 - 171; David Hilbert und Wilhelm Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928; 4. Aufl., Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959

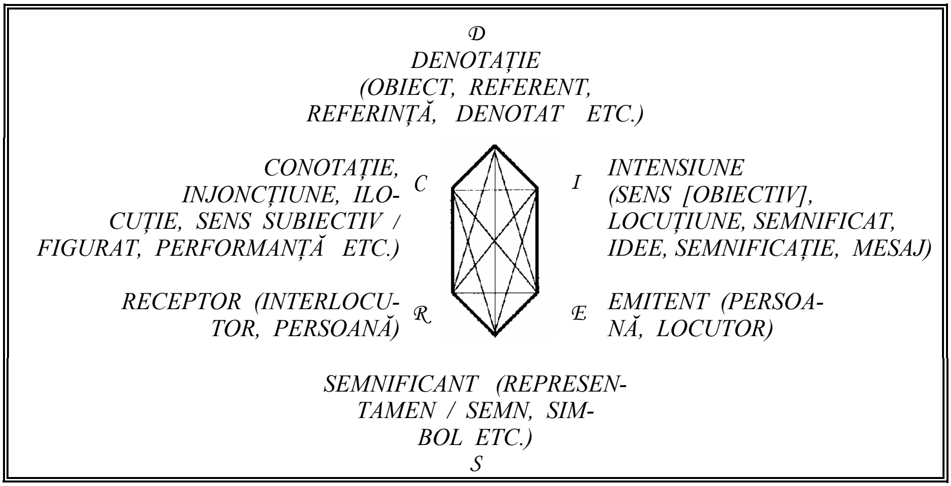
[5] Petru Ioan, *Educație şi creație în perspectiva unei logici "situaționale"*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1995; Petru Ioan (coord.), *Logică şi edicație*, Editura Junimea, Iaşi, 1995; Petru Ioan (coord.), *Aplicații ale hexadei situaționale*, Editura "Ştefan Lupaşcu", Iaşi, 1999; Petru Ioan, *Logica "integrală"*, vol. I, Editura "Ştefan Lupaşcu", Iaşi, 2000; etc.

sentinţă ? / etc.; ☞ (5) ca problemă a *performanţei discursive* ("C") – în ce registru se va fi transmis cutare mesaj ? / sub ce indicativ ar trebui decriptat un anume text ? / ce joc lingvistic deserveşte o anume secvenţă ? / etc.; ☞ (6) ca problemă *a adresei* ("R") – la cine trebuie să ajungă mesajul studiat ? / pe cine s-a contat în editarea textului cercetat ? / pe cine ar putea interesa sau convinge o anume constelaţie discursivă ? / pe cine ar putea o anume desfăşurare discursivă şi cum ar putea ea să afecteze pe destinatar ? / etc.

2. DECIZIE ŞI DECIDABILITATE ÎN CONTEXT MULTIDISCIPLINAR

Din cele precizate, se degajă, deja, impactul unor multiple abordări asupra problemei puse în discuţie. Dimensiunea subiectivă, ţinînd de pregătirea pentru comunicare şi de formarea interlocutorului decis se regăseşte, desigur, în spectrul *retoricii* din toate timpurile şi în discipline subsumate *psihologiei*, după cum ea este circumscrisă de *stilistică*, de *teorii ale managementului* şi *ale marketingului* (inclusiv în versiunea ştiinţei organizării şi conducerii acţiunii militare, în arta actoriei, în teoria presei, în generalizarea experienţei din planul publicităţii şi al relaţiilor cu publicul etc.), tinzînd spre o maximă extensie şi spre un contur expres prin *teoria deciziilor raţionale*.

Aspectele ce fac din decizie o problemă vizînd semnificantul (într-o mai mare sau mai mică corelaţie cu ceilalţi parametri semiotici) sînt intim legate de sferele lingvisticii (începînd cu morfologia şi sintaxa), dar pot fi sistematic urmărite în discipline ce alimentează încercări de *generalizare a retoricii* [6], în acord cu diverse tipuri de limbaje (mai mult sau mai puţin articulate), în teorii formalizate ale textului, în lingvistica de tip computaţional şi în teoriile asupra corpului lingvistic, dezvoltate de matematicieni şi informaticieni, etc.



1°. Hexagonul situaţiei semiotice, antrenînd doi poli personali ("E" şi "R"), doi poli materiali ("S" şi "D") şi doi poli spirituali ("I" şi "C")

---

[6] Grupul μ (Jacques Dubois, Francis Edeline, Jean-Marie Klinkenberg, Philippe Minguet, François Pire şi Hadelin Trinon), *Retorica generală*, Editura Univers, Bucureşti, 1974

Teoria semantică *a sensului* şi teoria semantică *a referinţei* spun de la sine în ce orizonturi ale comunicării dau seamă de problema în atenţie, iar *pragmatica* "de al treilea grad" [7], în postura teoriei conotaţiei şi a actelor de limbaj, închide grila hexadică la parametrul *"C"*, al performanţei discursive.

Am lăsat la sfîrşit incidenţele cu logica, întrucît această ştiinţă pare a se declina cu fiecare gen de perturbare a comunicării şi de indecidabilitate expresivă. Într-o măsură sau alta, problema deciziei şi a indecidabilităţii este o problemă logică: ☞ (1) în perspectiva *emitentului*, sau a *locutorului*, dacă avem în vedere *ars disserendi* (în sensul lui Cicero), *logica sentimentelor* (în accepţia lui Théodule Ribot), *logica devenirii* (conform viziunii psihanaliste a lui Etienne Got [8]) şi alte formaţii de acest gen; ☞ (2) în orizontul *receptorului* şi a *interlocutorului*, luînd în considerare *retorica*, *hermeneutica* (ca logică a convenienţei) şi mai recenta *logică a perlocuţiunii*; ☞ (3) pe coordonata *semnificantului*, cunoscute fiind multiplele încercări de formalizare a limbajelor naturale [9], propensiunea spre *logica "naturală"* a limbajului, *logica simbolizării* (proiectată de Constantin Noica, în orizontul unei supralogici a formelor ostile), logica "dinamică" a limbajelor de programare etc.; ☞ (4) pe linia *denotaţiei* (sau a *extensiunii*), întrucît logica în ansamblu a putut fi recomandată [10] sub auspiciile *semanticii*; ☞ (5) în vecinătatea *sensului* (a *înţelesului*, sau a *intensiunii*), de vreme ce astăzi se încearcă "calcule ale sensului" [11] şi "logici intensionale"; ☞ (6) în legătură cu *ilocuţiunea* (sau *injoncţiunea*) discursului, ştiut fiind că logicile discursului practic şi-au aflat, deja, generalizarea într-o logică *a ilocuţiunilor* [12], că studiul conotaţiei se împlineşte într-o logică a povestirii [13] etc.

3. NON-SENS FORMAL (SAU NON-SENS MORFO-SINTACTIC) ŞI INDECIDABILITATE LA NIVELUL SEMNIFICANTULUI

Strict logică, semio-logică, ori doar tangentă cu logica, problema deciziei în orizontul semnificantului dobîndeşte contur o dată cu teoria *coerenţei sintactice* [14], inspirată de teoria *categoriilor semantice*, a lui Edmund Husserl, şi de ecourile acesteia în logica lui

---

7 Françoise Armengaud, *La pragmatique*, P. U. F., Paris, 1985, pp. 77 sqq.

8 Etienne Got, *La pensée binaire. Jalons pour une logique du devenir*, Paris, 1973.

9 Cf., între altele: Peter Kümmel, *Formalisation of Natural Language*, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

10 De către Charles Sanders Peirce, gînditorul care – într-un fragment de prin 1897 (publicat în: *Collected Papers*, vol. 2, §. 227; traducere românească în: Charles Sanders Peirce, *Semnificaţie şi acţiune*, Editura Humanitas, Bucureşti, 1990, p. 268) – resuscită *triviumul* disciplinelor liberale pe coordonatele unei ştiinţe integratoare asupra limbajului şi a comunicării (*semiotica*), în configuraţia: *gramatică pură*, *logică "propriu-zisă"* (ca "ştiinţă formală a condiţiilor adevărului reprezentărilor") şi *retorică pură*. Tripartiţia va fi revizuită de Charles Morris prin recursul la termenii cu utilizare curentă: *sintaxă* (teoria relaţiilor dintre semne), *semantică* (teoria relaţiilor dintre semne şi referenţii acestora) şi, respectiv, *pragmatică* (teoria relaţiilor dintre semne şi uitlizatorii acestora).

11 Peirre - Marie Lavorel, *Éléments pour un calcul du sens*, Dunod, Paris, 1975.

12 Daniel Vanderveken, *Illocutionary Logic and Self-defeating Speech Acts*, în: J. R. Searle, F. Kiefer, and W. Bierwisch (eds.), *Speech Act Theory and Pragmatics*, D. Reidel. Publishing Company, Dordrecht, 1980; John Rogers Searle, Daniel Vanderveken, *Foundations of Illocutionary Logic*, Cambridge University Press, 1985.

13 Claude Bremond, *Logica povestirii*, trad. din fr., Ed. Univers, Bucureşti, 1981.

14 Kazimierz Ajdukiewicz, *Die sintaktische Konnexität*, "Studia Philosophica", vol. 1, 1935, pp. 1 - 27; repr. in: Stors Mc. Call (ed.), *Polish Logic: 1920 - 1939*, Clarendon Press, Oxford, 1967, pp. 207 - 231

Stanislaw Le✷niewski [15].

Ce înseamnă, însă, a *decide* din punctul de vedere al semnificantului ? Pornind de la premisa că finalitatea comunicării se asigură prin enunţuri, a *decide* este totuna cu a stabili: ☞ (1) dacă o expresie dată este "bine formată" şi, ca atare, posedă un sens *formal* (sau *morfo-sintactic*); ☞ (2) dacă ea nu are nici un astfel de sens; ☞ (3) dacă ea are mai multe asemenea sensuri.

"Numărul şapte reprezintă un număr prim" este o ilustraţie în limba română pentru primul caz de "enunţare", după cum tot astfel este şi expresia *"It is raining"* (*"plouă"*) în limba engleză, ori expresia "$p \supset (q \vee r)$" (*"p implică disjuncţia dintre q şi r"*) în limbajul funcţiilor interpropoziţionale de adevăr, propriu logicii moleculare. *"Cifrele plîng se"* este un non-sens formal în limba română, la fel cum fără nici un sens formal ni se înfăţişează secvenţa *"le silence répond psihologique"* în raport cu limba franceză, ori formula "$\supset Qx \vee Ryz$" în limbajul logicii predicatelor.

Fiecare dintre cele trei (contra)exemple de articulare a propoziţiei păcătuiesc prin incompletitudine, putînd evolua spre enunţuri efective prin adăugarea de constituenţi: *"Cifrele plîng* şi *se* resemnează*"*; *"le silence répond* alors à une espèce de modèle *psihologique"*; "$Pxy \supset Qx \vee Ryz$".

Non-sensuri formale şi mai grave sînt, însă, expresiile ce par a fi enunţuri într-o limbă sau alta, precum *"t-au bărut pin lotive dină atum nonserapate"*, în raport cu limba română; *"glokaja kuzdra stenobuganola bokra i kudjavit bokrjsuka"* faţă de limba rusă, ori *"la strataauresse parillé drissa figuement le birin et caujette le birisseau"* [16], sub auspiciile francezei.

Cît priveşte *multivocitatea*, ca stare de *indecizie morfo-sintactică*, ea se datorează posibilităţii de a eticheta multiplu unul sau mai mulţi constituenţi ai expresiei proferate. Astfel, rostirea *"Pe Ion Gheorghe l-a bătut"* s-ar putea interpreta *"Gheorghe l-a bătut pe Ion"*, ori "[cineva] *l-a bătut pe Ion Gheorghe* [iar nu pe altcineva]". Tot astfel, formula macropropoziţională (nu tocmai bine formată) "$p \vee q \supset r$" s-ar putea citi "$p \vee (q \supset r)$" (*"p se află în disjuncţie cu implicaţia dintre q şi r"*), ori "$(p \vee q) \supset r$" (*"disjuncţia dintre p şi q implică r"*), ceea ce induce schimbări şi în planul sensului, şi în planul referinţei.

Pentru a comensura fenomenul ambiguităţii în limitele *sensului formal* şi ale *bunei formări* a expresiilor, promotorii teoriei categoriilor semiotice şi ai analizei prin etichetarea constituenţilor sintactici s-au îndreptat spre un "calcul al tipurilor sintactice" şi al coerenţei sintactice, relevant, deopotrivă, pentru limbile naturale şi pentru limbajele formale, mai mult sau mai puţin artificiale.

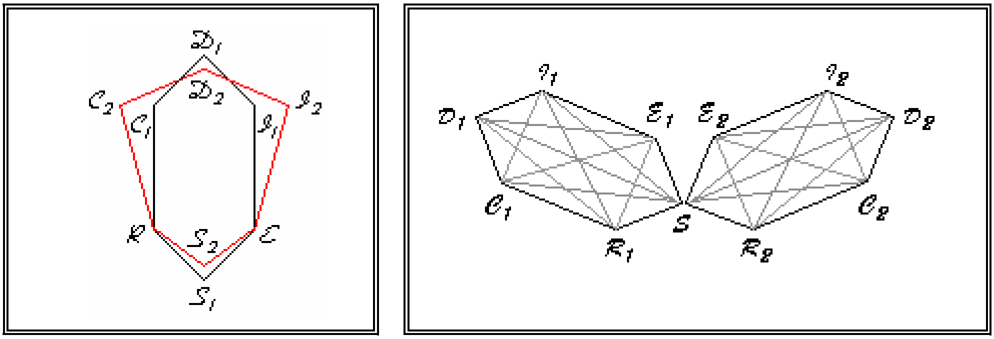
Sub aspectul fenomenelor de limbaj, indecidabilitatea morfo-sintactică, de care vorbim, se subsumează *heteronimiei*. Deşi au aceiaşi constituenţi, expresiile pot diferi prin unii sau chiar prin toţi parametrii semiotici, precum diferă compuşii chimici ce au aceleaşi elemente, izotopii aceluiaşi element, numerele compuse ce antrenează în alcătuirea lor aceleaşi cifre, tablourile pictate cu aceleaşi culori de bază şi aşa mai departe. În

---

[15] Avataruri ale teoriei categoriilor şi evoluţii ale procedurilor de analiză categorială pot fi urmărite în: Petru Ioan, *Orizonturi logice. Deschideri şi resemnificări în orizontul actual al formalismelor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1995 pp. 81 - 104

[16] Pentru paternitatea pseudo-enunţului din rusă şi a celui din franceză, precum şi pentru alte asemenea construcţii, cf.: Petru Ioan, *Orizonturi logice*, 1995, p. 86

(2.1°) reprezentăm situația în care expresia emi tentului (*"E"*) se receptează în două feluri distincte (*"S_1"* şi *"S_2"*), de către unul şi acelaşi interpret (*"R"*), iar în (2.2°) redăm situația în care una şi aceeaşi expresie (*"S"*), cu regimuri distincte de emisie (*"E_1"* şi *"E_2"*), conduce receptori distincți (*"R_1"* şi *"R_2"*) la conținuturi (*"I_1"* şi *"I_2"*) şi la referințe (*"D_1"* şi *"D_2"*).

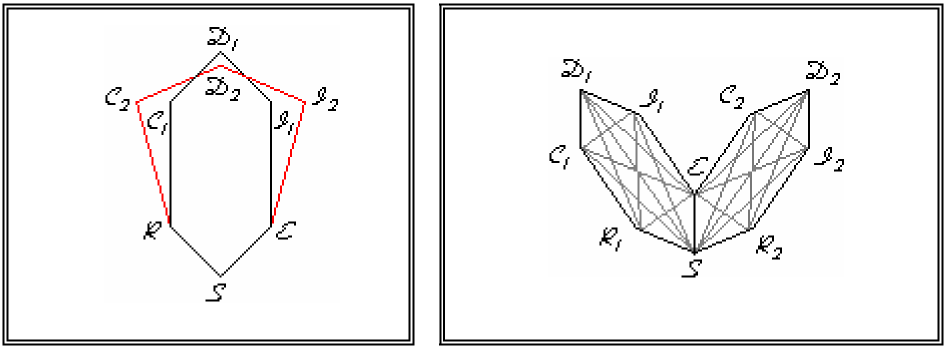


2.1 - 2°. Multivocitatea (respectiv ambiguitatea), ca stare de indecizie morfo-sintactică

4. INDECIDABILITATE ŞI MULTIVOCITATE ÎN RAPORT CU ÎNȚELESUL (SAU CU SENSUL) MATERIAL

O expresie bine formată (sau corectă) într-o limbă "naturală" (altfel spus, o construcție lingvistică cu rol propozițional ce are un *sens formal*, adică nu este *ambiguă*, sau *multivocă* din punct de vedere morfo-sintactic !) poate păcătui din puct de vedere *sintactico-semantic*, dacă asocierea constituenților săi este nefirească, ori dacă unul şi acelaşi constituent (cu rol de argument, ori de categorie fundamentală) are înțelesuri multiple.

În primul caz, vom avea de-a face cu *non-sensul material*, precum în expresii româneşti (cu structură propozițională !) de tipul: *"elicea crocodilului face imposibilă extragerea rădăcinii de palmier"*, *"proprietățile afrodisiace ale numerelor iraționale iau rapid în greutate"*, *"dacă zăpada este somnoroasă, privighetorile devin incongruente"* şi aşa mai departe.



3.1 - 2°. Multivocitatea (respectiv ambiguitatea), ca stare de indecizie sintactico-semantică

Expresiile cu care ne întîlnim în cel de-al doilea caz dau seamă de forma sintactico-semantică a *indecidabilității*: unuia şi aceluiaşi contituent sintactic (termen sau noţiune) i se ataşează două sau mai multe lecturi posibile, ajungîndu-se, astfel, la multiplicarea înţelesurilor secvenţei discursive în ansamblu. Astfel se comportă enunţarea *"jucătorul este mulţumit de pat"*, ce poate însemna fie că *"jucătorul* [de şah] *este mulţumit de* [faptul că a terminat partida în situaţia de] *pat"*, fie că *"*[la hotel, ori în altă parte] *jucătorul* [a lăsat impresia că] *este mulţumit de pat* [ca piesă de mobilier]*"*. Tot astfel, expresia *"i-a pus broasca la uşă"* se poate interpreta fie în sensul că *"*[lăcătuşul, sau altcineva] *i- a montat broasca la uşă "*, fie în sensul că *"*[vecinul, ori altcineva] *i-a lăsat broasca* [ţestoasă] *la uşă* [găsind-o, rătăcită, prin preajma locuinţei]*"*.

Genul de multivocitate (respectiv de ambiguitate şi de indecidabilitate) la care ne-am oprit prin ultimele construcţii propoziţionale ne aşează în orizontul *omonimiei* (al *omografiei* şi, respectiv, al *omofoniei*).

O ipostază a fenomenului în atenţie (conştientizarea de către acelaşi interpret, *"R"*, a două lecturi posibile – *"I_1 D_1 C_1"* şi *"I_2 D_2 C_2"* – în cazul uneia şi aceleiaşi propoziţii gramaticale *"S"* !) este schematizată în figura (3.1°), iar o altă ipostază (cea în care interpreţi distincţi – *"R_1"* şi *"R_2"* – conferă lecturi distincte – *"I_1 D_1 C_1"* şi *"I_2 D_2 C_2"* – expresiei unuia şi aceluiaşi emitent *"E"* !) înfăţişăm în figura (3.2°)

5. AMBIGUITATE SEMANTICĂ ŞI INDECIDABILITATE ÎN RAPORT CU REFERINŢA (SAU DENOTAŢIA) EXPRIMĂRII

Nu orice expresie cu *aparenţă de enunţ* se întîmplă să fie o *rostire* într-o limbă dată (*"S"*), după cum nu orice *enunţ* are de la sine un *înţeles* (*"I"*). În şirul deficienţelor de comunicare, urmează să analizăm împrejurări în care un enunţ propriu-zis (*"S"*), cu sens sau "cu miez" în planul conţinutului (*"I"*), nu are nici o *referinţă* (*"D_0"*), ori are mai multe referinţe (*"D_{1-n}"*).

În primul caz, ne întîlnim cu formulările paradoxale şi antinomice, de tipul *"Epimenide cretanul spune că toţi cretanii sînt mincinoşi"*, *"mulţimea tuturor mulţimilor ce nu se conţin pe ele înseşi ca element se conţine pe ea însăşi ca element"*, *"bărbierul care este tocmit să radă pe toţi cei care nu se rad singuri se rade singur"* etc.

Creditînd cu adevăr asemenea "propoziţii", ele se aşează sub semnul falsităţii; dacă le socotim false, ele ne conduc spre adevăr, iar jocul pervers al auto-dezicerii se continuă la nesfîrşit [17].

În cel de-al doilea caz, ne confruntăm cu *indecidabilitatea referenţială*: una şi aceeaşi propoziţie ("sistematic ambiguă" !) poate primi valori de adevăr distincte, în raport cu contexte ale rostirii şi / sau ale enunţării (locutorul, auditorul, momentul şi locul elocuţiei, mediul fizic în care se produce enunţarea) diferite. Purtători ai ambiguităţii de acest gen [18] sînt pronumele personale (*"eu"*, *"tu"*, *"ei"*, *"voi"* etc.), demonstrativele sau deicticele (*"acesta"*, *"acelea"* etc.), adverbele (*"acum"*, *"cîndva"*, *"acolo"*, *"undeva"* etc.), determinativele timpului vebal etc., iar ele îşi precizează referinţa în contextul enunţării: *"TU nu ai cum să înţelegi o ASTFEL de întîmplare"*; *"VOI fi prezent ACOLO unde NE-AM plimbat"*; *"NE VOM da seama de greşeala pe CARE am făcut-O foarte CURÎND"* etc. La acest nivel al analizei, fenomenul ambiguităţii se subsumează, după unii, *semanticii referenţiale* [19] (respectiv *sigmaticii* [20]); după alţii, *semanticii pragmatizate* [21], *pragmaticii* [22] în general, ori *pragmaticii* "de primul ordin" [23].

Reflexul strict logic al enunţurilor dependente de contextul (sau de circumstanţele enunţării) sînt propoziţiile *generice* (ocazionale, sau circumstanţiale) şi formele propoziţionale *amfotere* (*sintetice*, sau *simplu-realizabile*): "p", "q", "r" etc. (ca scheme de propoziţii neanalizate), "Px", "Qxy", "$Rxyz$" şi "$\alpha \subset \beta$", "$\alpha = (\beta \cap \gamma)$" etc. (ca scheme de propoziţii simple), "$p \subset q$", "$(p \;\&\; q) \equiv r$" etc., "$Px \vee Qx$", "$(\exists x)[Px \subset (Qx \vee r)]$" etc., "$(\alpha = \beta) \;\&\; (\gamma \subset \delta)$" etc. (ca scheme de propoziţii compuse).

Semio-logic vorbind, spaţiul de joc al enunţurilor indecise din punct de vedere refer-

---

[17] Pentru desluşirea mecanismului auto-referinţei vicioase, cf.: Anton Dumitriu, *Soluţia paradoxurilor logico-matematice*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966; Gheorghe Enescu, *Teoria sistemelor logice. Metalogica*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1976, cap. 3, pp. 99 - 197; Petru Ioan, *Adevăr şi performanţă. Pretexte şi contexte semiologice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1987, cap. 3, pp. 124 - 227

[18] Adică: "semne indiciale" sau, pur şi simplu, "indici" (în terminologia lui Charles Sanders Peirce), "particule egocentrice" (cum le spune Bertrand Russell), "circumstanţiali egocentrici" (Philippe Devaux), "indicatori de subiectivitate" (Jean Vuillemin), "indicatori" (Nelson Goodman), "cuvinte ocurenţial-reflexive / *token-reflexive words*" (Hans Reichembach) etc. Cf.: Françoise Armengaud, *op. cit.*, p. 49

[19] Willard Van Orman Quine, *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1953, p. 130

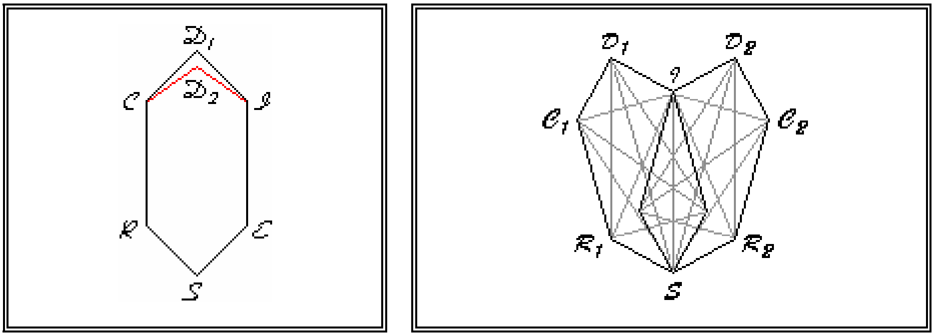
[20] Georg Klaus, *Semiotik und Erkenntnistheorie*, Berlin, 1963, p. 357

[21] Richard M. Martin, *Semiotics and Linguistic Structure*, State University of New York Press, Albany, 1978; *Pragmatics, Truth, and Language*, Donald Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, London, 1979

[22] Concepţia după care pragmatica este totuna cu studiul expresiilor indiciale a fost dezvoltată de către Yehoshua Barr - Hillel (*Indexical Expressions*, "Mind", 63, 1954; repr. in: Y. Bar - Hillel (ed.), *Pragmatics of Natural Languages*, D. Reidel P. C., Dordrecht, 1971) şi Richard Montague (*Pragmatics*, în: R. Klibanski, éd., *La Philosophie contemporaine*, vol. I, *Logique et fondements des mathématiques*, La Nouva Italia Editrice, Florence, 1968, pp. 102 - 122; *Pragmatics and Intentional Logic*, "Dialectica", 24, 1970)

[23] După B. Hanson – *A Program for Pragmatics*, în: S. Stendland (ed.), *Logical Theory and Semantic Analysis*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1974; a se vedea şi Françoise Armengaud, *op. cit.*, p. 47

enţial este *polisemia*. Cu acelaşi înţeles formal (sau morfo-sintactic) şi cu acelaşi sens material (sintactico-semantic), astfel de enunţuri pot dobîndi valori de adevăr diferite (şi semnificaţii *locuţionare* distincte), după circumstanţele în care sînt proferate, sau – pur şi simplu – consemnate. Ca atare, respectivele enunţuri îşi pot modifica restul coordonatelor semiotice, aşa cum se poate urmări în figura (4.2°), după cum şi le pot păstra, cînd este vorba de percepţii şi de interpretări diferite – "ID_1CR" şi "ID_2CR" – ale unuia şi aceluiaşi mesaj "S", ca în cazul situaţiilor de comunicare (şi de semnificare) reprezentate în figura (4.1°).



4.1 - 2°. Multivocitatea (respectiv ambiguitatea), ca stare de indecizie referenţial-semantică

6. AMBIGUITATEA (SAU INDECIDABILITATEA) LEGATĂ DE SENSUL COMUNICATIV (DERIVAT, SAU CONTEXTUAL) ŞI DE "PERFORMANŢA" DISCURSIVĂ

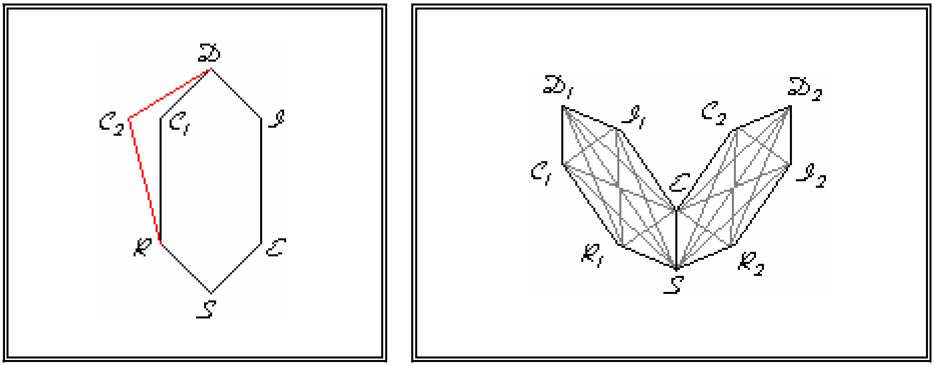
Chiar şi în absenţa *omonimelor*, ori a *particulelor indiciale*, frazele pronunţate sau cele consemnate pot induce ambiguitate prin sensul *exprimat* de *presupoziţiile* enunţării, ori de sugestii şi insinuări, adică de *subînţelesuri*.

În primul caz, propoziţia sau enunţarea (în deficit referenţial !) supusă analizei este adevărată dacă astfel este şi presupoziţia *acesteia*. De exemplu, are sens să spui că *"Ion Iliescu l-a desemnat drept prim-ministru pe Adrian Năstase"*, numai dacă s-a întîmplat că *Ion Iliescu a fost ales preşedinte al României*. Tot astfel, este adevărat că *"Nicolae Manolescu apreciază romanele ale lui Nichita Stănescu"*, numai dacă este adevărat că, printre altele, *Nichita Stănescu este şi autor de romane*, după cum este legitim să afirmi că *"pisicile Anei Blandiana sînt blînde"* numai dacă *Ana Blandiana are pisici* etc. În celălalt caz, adevărul (şi semnificaţia locuţionară a) propoziţiei depinde de capacitatea "auditorului" de a înţelege ceea ce dă (sau ceea ce lasă) să se înţeleagă locutorul. Spre exemplu, prin fraza *"candidatul pentru ocuparea catedrei vacante de matematică la Colegiul Naţional din Iaşi este un absolvent meticulos şi cu reale înclinaţii spre fantastic"* preşedintele comisiei de concurs ar putea înţelege că *respectiva persoană este mediocră şi aiurită*. La rîndul ei, afirmaţia după care *"proprietarii cehi ai uzinei metalurgice din Iaşi s-au dovedit foarte atenţi cu autorităţile F. P. S."* exprimă aproape deschis că *respectivii investitori ("fierarii veseli") au mituit persoane ale instituţiei prin care s-a făcut privatizarea fabricii pomenite.*

Plasate sub incidența *pragmaticii "de grad secund"* [24], enunțurile sau frazele în care spunerea este "constitutivă sensului" [25] supraliciteazã *indecizia* pe coordonatele sensului *subiacent* (indirect, metaforic, alegoric, parabolic – plastic, în orice caz). Ele manifestă şi, totodată, pun în valoare fluctuațiile "interpretantului" – coordonata prin excelență indeterminabilă din semiotica lui Charles Sanders Peirce, reprezentînd, între altele, proiecția semnului comunicat în mintea interpretului.

A înfrunta ambiguitatea (sau indecidabililitatea) şi a menține activitatea discursivă în limite raționale înseamnă, acum, a presupune că locutorul respectă normele comunicării [26] şi a te strădui să dezamorsezi "infracțiunile" constatate (în raport cu exigențele tacite ale schimbului de mesaje), prin desluşirea informației pe care interlocutorul nu o poate furniza explicit.

Ipostaza creditării cu *subînțelesuri* (respectiv cu sensuri *comunicative*, *injonctive*, sau *ilocuționare*) diferite ("IDC_1" şi "IDC_2") a uneia şi aceleiaşi expresii ("S") de către unul şi acelaşi interpret, sau receptor ("R"), este schematizată în figura (5.1°), iar cazul în care lectori, sau receptori diferiți ("R_1" şi "R_2") acordă tîlcuri diferite ("$I_1D_1C_1$" şi "$I_2D_2C_2$") uneia şi aceleiaşi expresii ("S") se regăseşte în figura (5.2°).



5.1 - 2°. Multivocitatea (respectiv ambiguitatea), ca stare de indecizie pe linia performanței discursive

---

[24] Françoise Armengaud, *op. cit.*, pp. 64 - 76

[25] Oswald Ducrot, *Dire et ne pas dire*, Hermann, Paris, 1972, *apud*: Françoise Armengaud, *op. cit.*, p. 76

[26] Decelate de către Herbert Grice (*Logic in Conversation*, in: P. Cole and J. L. Morgan, eds., *Sintax and Semantics*, vol 3, *Speech Acts*, Academic Press, 1975), aparent după criteriul deducției metafizice kantiene (cvadrupla "funcție a gîndirii în judecată" !), drept maxime subiacente principiului cooperării: maxima (*cantitativă*) a strictei informativități; maxima (*calitativă*) a sincerității; maxima (de ordinul *relației*) a pertinenței şi maxima (*modală*) a bunelor maniere

7. AMBIGUITATE ŞI INDECIDABILITATE LA NIVELUL "INTERVENŢIEI DISCURSIVE" ŞI AL SEMNIFICAŢEI EXPRESIVE (ALOCUŢONARE)

Din perspectiva expresă a subiectului emitent, problema deciziei se repliază ca: ☞ (1) problema lui *dacă* să spui, să iei cuvîntul, să te pronunţi, să scrii, să te exprimi plastic, să te dai în spectacol, să-ţi faci cunoscută opinia, să-ţi trădezi intenţia etc., în legătură cu variabila *"E"*, a emitentului, şi, tot astfel, a emisiei, a rostirii, a înscenării etc.; ☞ (2) problema lui *cum* să spui (să scrii, să vorbeşti, să te exprimi), *prin ce mijloace* să comunici, *în ce fel* să te faci înţeles etc., cît priveşte coordonata *"S"* a *desemnării* şi a articulării în cod; ☞ (3) problema lui *ce* să spui (să exprimi, să rosteşti etc.), *pe ce mesaj* să te axezi, *cu ce idei* să te adresezi publicului prezumtiv, *ce semnal* să trimiţi interlocutorului sau auditoriului, *ce înţelesuri* să subliniezi, *cărui motiv* să i te subordonezi etc., pe filiera *intensiunii* (*"I"*) şi a *semnificatului* obiectiv; ☞ (4) problema lui *despre cine* sau *despre ce* să comunici, *la ce* să te *referi*, *pe cine* să vizezi în relatarea făcută, *ce* să descrii, ori să semnalezi, *cînd* s-o faci şi unde s-o faci, *ce* realităţi să transfigurezi etc., dacă ai în vedere coordonata *"D"*, a denotării şi a referinţei la lume; ☞ (5) problema lui *cui* să spui (sau să te adresezi), *pe cine* să apelezi, *a cui* audienţă să cîştigi, *pentru cine* să configurezi mesajul, *cărui public* să i te dedici în actul comunicării etc., *vis à vis* cu dimensiunea *"R"*, a *receptorului* şi a audienţei; ☞ (6) problema lui *în ce scop* să spui (să relatezi, să informezi), dacă să *înfricoşezi* sau să *linişteşti* prin cele transmise, dacă să *implori* sau să *ordoni*, să *apreciezi* ori să *te îndoieşti*, să *hotărăşti* sau să le *ceri sfatul* etc., sub aspectul *conotării* şi al *performanţei discursive "C"* – variabila sensului *subiectiv* şi a *conţinutului* ilocuţionar.

O dată spuse sau scrise, mesajele emitentului se cer, însă, decriptate (descifrate, sau interpretate), după cum se cere evaluată reuşita actului receptării de către subiecţi-martori în aventura fără capăt a comunicării. Cum despre receptare şi interpretare a fost vorba şi în subdiviziunile precedente, menţionăm că pînă acum s-a avut în vedere *ambiguitatea* (respectiv *indecidabilitatea*) ce afectează, într-un fel sau altul, valoarea *asertivă* a enunţului şi poziţia acestuia în raport cu adevărul.

La nivelul semnificaţiei *autoexpresive* [27], dificultăţile evaluării construcţiilor lingvistice în rol de *propoziţii* sporesc în legătură cu decriptarea *intenţiei* locutorului (şi a finalităţii urmărite prin exprimarea întreprinsă), cu înţelegerea *orientării* pe care o imprimă locutorul relaţiei dintre *cuvinte* şi *lucruri*, cu desluşirea *stărilor psihice* pe care le transmite locutorul prin actul enunţării, cu aprecierea *gradului în care se angajează locutorul* în direcţia realizării stărilor de lucruri vizate prin mesajul pus în circulaţie etc. [28],

---

[27] Petru Ioan, *Logica "integrală"*, vol. 1, Editura "Ştefan Lupaşcu", Iaşi, 2000, p. 80

[28] Am evocat 4 din cele 12 criterii după care se pot clasifica actele ilocuţionare, în concepţia lui John Rogers Searle (*Speech Acts*, Cambridge University Press, 1969 / *Les actes de langage. Essai de philosophie du langage*, Hermann, Paris, 1972; *A Taxonomy of Illocutionary Acts*, in: Keith Gunderson, ed., *Language, Mind and Knowledge*, University of Minnesota Press, Mineapolis, 1975, pp. 344 - 369; *Expression and Meaning*, Cambridge University Press, 1979 / *Sense et expression*, Minuit, Paris, 1982; etc.), dar şi în clasificări alternative (J. L. Austin, *How to Do Things with Words*, Clarendon, Oxford, 1962 / *Quand dire, c'est faire*, Seuil, Paris, 1970; Dieter Wunderlich, *Towards an Integrated Theory of Grammatical and Pragmatical Meaning*, in: A. Kasher, ed.: *Language in Focus*, D. Reidel P. C., Dordrecht, 1976, pp. 251 - 277; Th. Ballmer

dar şi în legătură cu conştientizarea efectelor (perlocuționare) produse de rostirea (sau exprimarea) în altă postură a enunțurilor (acestea putînd să conducă la *convingerea* sau la *persuadarea* destinatarului; la *distragerea* acestuia, la *frustrarea*, sau la *inducerea* sa *în eroare*; la *încurajarea*, la *înspăimîntarea*, sau la *intimidarea* sa; la înfiriparea *dubiului*; la provocarea unor *reamintiri*; la generarea sau accentuarea *disperării*, a *speranței* şi a altor stări de spirit; la exercitarea *seducției*; la trezirea *suspiciunii* şi la alte asemenea reacții, sau atitudini).

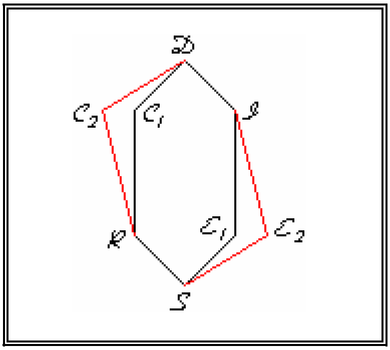
Adusă în orizontul *pragmaticii "de al treilea grad"*[29] şi al *logicii ilocuționare*, decizia devine o activitate prin care se disociază actele: ☞ (1) de tipul *ASERTIVELOR*: *"|9B(p)"*; ☞ (2) de tipul *DIRECTIVELOR*: "!8W (*H îndeplineşte A)"*; ☞ (3) de tipul *PROMISIVELOR*: *"C 8I (S îndeplineşte A)"*; ☞ (4) de tipul *EXPRESIVELOR*: *"E ∅ P(S / H + proprietate)"*; ☞ (5) de tipul *DECLARAȚIILOR*: *"D ;B (p)"*, respectiv al *declarațiilor asertive*: *"D*^{a} 9; *B (p)"*, pentru: *"p"* ca semn al conținutului propozițional supus injoncți-unilor discursive; *"|"* ca semn al aserțiunii; "!", ca marcă a *directivelor*; *"C"* ca însemn al *promisiunii*; *"E"* ca simbol al *expresivelor*; *"D"* ca simbol al operației întreprinse prin *declarații*; *"D*^{a}*"* ca indicator al declarațiilor asertive; "9" ca semn al ajustării cuvintelor la lucruri; "8" ca semn al ajustării lucrurilor la cuvinte; ";" ca semn al corespondenței deja instaurate între cuvinte şi lucruri; *"∅"* ca simbol al necorespondenței dintre lucruri şi cu-vinte (în cazul *expresivelor*), respectiv ca semn al absenței unei condiții a sincerității (în cazul *declarațiilor*); *"B"* (de la englezescul *belief*) ca semn al *credinței*; *"W"* (de la *want*) ca semn al dorinței; *"I"* (de la englezescul *intention*) ca semn al intenției; *"P"* ca variabilă a stărilor psihice ce corespund îndeplinirii actelor ilocuționare expresive; *"H"* (de la englezescul *hearer*) ca semn al auditoriului; *"A"* ca semn al acțiunii viitoare; *"S"* (de la englezescul *speaker*) ca semn al locutorului.

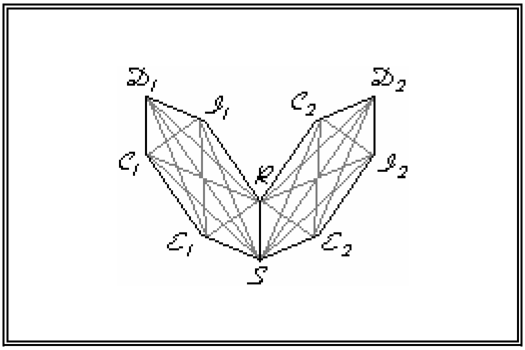
Situații de indecidabilitate în orizontul "alocuției" creează enunțuri sau fraze româneşti de tipul: *"de vrei să cunoşti adevăratele sentimente ale cetățenilor, coboară în mulțime şi stai de vorbă cu oamenii"* (o constatare, sau un ordin condițional ?); *"ştiu eu dacă vremea se va menține frumoasă şi săptămîna viitoare ?"* (o întrebare, sau declinare politicoasă a unei invitații la promenadă ?); etc. În figura (6.1 - 2°) redăm două situații în care una şi aceeaşi expresie (*"S"*) dezvăluie intenții discursive diferite, în condiții distincte de emisie (în prima situație fiind vorba de aceeaşi semnificație *locu-ționară "SID"*, iar în a doua dedublîndu-se chiar şi această componentă din economia *înțelesului*, sau a *sensului*).

---

and W. Brennensthul, *Speech Act Clasification. A Study in the Lexical Analysis of English Speech Activity Verbs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981; Petru Ioan, *Adevăr şi performanță. Pretexte şi contexte semio-logice*, Bucureşti, 1987, pp. 228 - 278; Daniel Vande-rveken, *Les actes de discours*, Mardaga, Bruxelles, 1988, pp. 165 - 203)

[29] B. Hanson, *loc. cit.*; Françoise Armengaud, *op. cit.*, p. 46





6.1 - 2°. Multivocitatea (respectiv ambiguitatea), ca stare de indecizie pe linia semnificaţiei alocuţionare

8. MULTIVOCITATE ŞI AMBIGUITATE ÎN ORIZONTUL DE AŞTEPTARE AL RECEPTORULUI

La nivel hipo- sau hiper-semiotic, pe întinderi restrînse sau mai ample de discurs, *problema deciziei* este trăită cotidian, de fiecare dintre noi, în postura "adresantului", sau a "destinatarului". Ea ne confruntă cu nelămuriri de-o clipă, ori cu întrebări chinuitoare, ne inspiră ezitări, ori ne menţine pe linia convingerii. Să o depănăm, aşadar, în raport cu modelul hexadic al situaţiilor de semnificare şi de comunicare, consemnînd-o: ☞ (1) ca problema lui *mie mi se adresează* ? / *la mine se face aluzie* ? / *care este substratul* exprimării ? / *ce atitudine* s-ar cere adoptată ? / *pot să am încredere* ? / etc., prin prisma coordonatei *"R";* ☞ (2) ca problema lui *ce să însemne* oare ? / *ce se desemnează* prin ? / *în ce limbă* se exprimă "interlocutorul" ? / *cum să decriptez* mesajul ? / *cum s-ar traduce* secvenţa textuală în atenţie ? / *cărei civilizaţii* îi aparţine fragmentul scriptural ? / *din ce epocă* datează relatarea ? / *în ce stil* a fost compus mesajul ? / etc., în cazul variabilei *"E";* ☞ (3) ca problema lui *ce se spune* în discursul urmărit ? / *ce* vrea să exprime remarca lui *x* ? / *ce semnifică* fragmentul citat ? / *ce* înţeles are poanta lui *y* ? / *care* este tîlcul celor rostite ? / etc., din perspectiva parametrului *"I"* – al intensiunii; ☞ (4) ca problema lui *cine* a spus (a scris, a compus etc.) mesajul parcurs ? / *de la cine* a pornit ideea ? / *cine* este autorul ? / etc., în conexiune cu dimensiunea *"E"* – a emitentului; ☞ (5) ca problema lui *despre ce* (sau despre cine) se vorbeşte în naraţiunea urmărită ? / *unde* se petrece acţiunea relatată ? / *cînd* s-au întîmplat cele expuse ? / *ce corespondenţe* au secvenţele discursive în atenţie cu realitatea ? / *cît* de veridice sînt spusele în atenţie ? / etc., sub impresia coordonatei *"D"* – a referinţei; ☞ (6) ca problema lui *sub ce* tonalitate să receptez mesajul ? / *ce atitudine* să adopt în contextul spuselor adresate ? / *cît* de hotărîtă era ameninţarea rostită ? şi aşa mai departe, dacă ne raportăm la polul *"C"* – al ilocuţiunii.

Cum şi de această dată ne orientăm spre aspectele de maximă generalitate ale exprimării şi comunicării discursive, problema deciziei ancorează în sfera semnificaţiei *interlocuţionare*, în legătură cu modalităţi de "receptare a receptării". Este momentul în care putem pune în discuţie şi competenţa şi performanţa interpretativă. La nivelul "simţului comun", ne întrebăm dacă am receptat (sau nu) corect mesajul alocutorului (dacă i-am înțeles – sau nu – toate cuvintele şi toate frazele rostite), pentru a-i răspunde corespunzător. La nivelul conştinței reflectate, ne preocupă grila prin care ne-am raportat la mesajul destinatorului, calea prin care am încercat să-i pătrundem "textul" şi "subtextul" comunicării întreprinse.

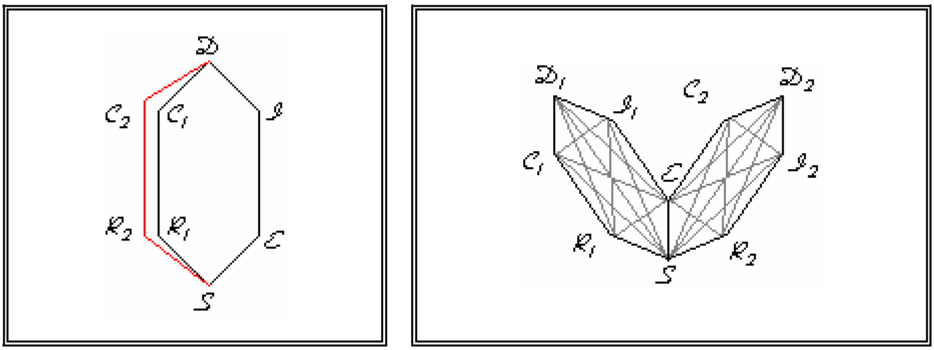
Indecizia trimite, acum, spre libertatea metodologică şi spre limitele aferente oricărui instrument cognitiv. Ea decurge din împrejurarea că emitentul poate gestiona mai multe intenții discursive, ca şi din aptitudinea receptorului de a atribui un înțeles sau altul secvențelor înregistrate, de a le "interpreta" şi "resemnifica" după puterile şi după scopurile proprii.

Mai puțin şocantă decît formele asociate precedentelor variabile din modelul hexadic al situațiilor de comunicare, *indecizia interlocuționară* rezonează cu multitudinea nivelurilor de percepere şi aprofundare a "datului" comunicării.

Enunțul după care *"apa este un element"*, spre exemplu, avea un tîlc pe vremea lui Thales şi într-o îndelungată tradiție cosmologică, iar o cu totul altă semnificație începînd cu 1783, anul în care Antoine - Laurent Lavoisier a avut inspirația de a trece vapori de apă peste fierul înroşit, izolînd, în acest fel, *hidrogenul* (sau gazul "generator de apă") şi îndatorînd cu una dintre cele mai epocale descoperiri chimia modernă.

Tot astfel, formula atomară *"SaP"* a reprezentat, de-a lungul tradiției aristotelice în logică, ca şi în orizontul logicii moderne a lui George Boole, schema unei propoziții simple, pentru ca, în viziunea lui Franz Brentano, a lui Peter Frederik Strawson, Aleksej V. Smirnov, ori Stanislaw Jaśkowski, aceeaşi formulă de enunț să se lase descompusă în conjuncții de două sau mai multe structuri elementare.

În marja de ambiguitate inerentă oricărei comunicări, la nivelul marcat de coordonata *"R"* din paradigma de complexitate mediană asociată unor desfăşurări mai ample de discurs, avem a reflecta la viabilitatea practicilor ce țin de retorică, de hermeneutică, de semiotică, de critică literară, de stilistică, de poetică şi, de ce nu, de logica însăşi, ca ştiință a medierii interlinguale.



7.1 - 2°. Multivocitatea (respectiv ambiguitatea), ca stare de indecizie pe linia semnificației interlocuționare

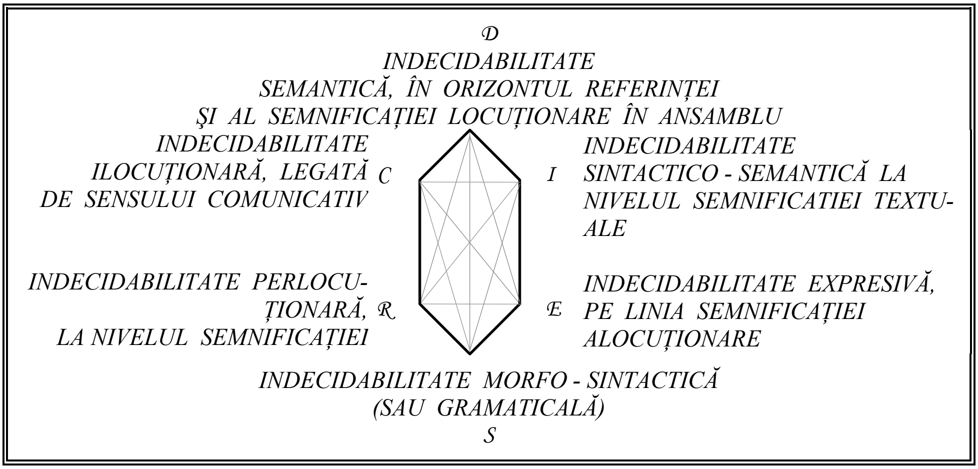
9. CARACTERISTICI ALE AMBIGUITĂŢII ŞI INDECIDABILITĂŢII

Din cele precizate în orizontul unei concepţii multinivelare asupra discursului decurg cel puţin 5 caracteristici ale *deciziei* şi *indecidabilităţii*.

1. Cele două stări ale articulării şi ale exprimării lingvistice (*decizia* şi *indecidabilitatea*) privesc *construcţiile* cu rol de *propoziţii* (iar în unele cazuri, pe cele cu rol de forme, sau structuri propoziţionale) luate punctual, dar pot fi extinse şi ansamblului discursiv la care acestea participă. În matematică şi în logică, spre exemplu, se tratează *decidabilitatea* teoriilor şi a sistemelor formale, tot aşa cum – din perspectiva disciplinelor sermocinale (estetica, hermeneutica, semiotica, poetica, ştiinţa criticii literare etc. – contează posibilitatea unei interpretări coerente a textului.

2. Stările polare de care ne ocupăm se repliază în raport cu fiecare coordonată a semnificaţiei. În ordinea diminuării (ori a estompării) progresive, ambiguitatea (şi indecidabilitatea) se manifestă şi se cere înfruntată în legătură: ☞ (1) cu semnificaţia *morfo-sintactică* (sau *gramaticală*) a secvenţei discursive în atenţie: *"S"*; ☞ (2) cu semnificaţia *logică*, sau *intensională*: *"I"*; ☞ (3) cu semnificaţia *extensională*, sau *referenţială*: *"D"*; ☞ (4) cu semnificaţia *conotativă*: *"C"*; ☞ (5) cu semnificaţia *autoexpresivă*: *"E"*; ☞ (6) cu semnificaţia *perlocutivă*: *"R"*.

3. Aceleaşi stări (de *univocitate* şi, respectiv, de *ambiguitate*, sau *multivocitate*) se manifestă distinct în raport cu fiecare modalitate de însumare a factorilor semnificaţiei [30]: ☞ (1) cu semnificaţia *gramaticală*, sau *morfo-sintactică* / *"S"*; ☞ (2) cu semnificaţia *textuală* / *"S + I"*; ☞ (3) cu semnificaţia *locuţionară* / *"S + I + D"*; ☞ (4) cu semnificaţia *ilocuţionară* / *"S + I + D + C"*; ☞ (5) cu semnificaţia *alocuţionară* / *"S + I + D + C + E"*; ☞ (6) cu semnificaţia *interlocuţionară* / *"S + I + D + C + E + R"*.



7°. Forme şi niveluri ale ambiguităţii şi indecidabilităţii, în raport cu polii situaţiilor de comunicare şi cu tipurile aferente de semnificaţie

---

[30] Petru Ioan, *Logica integrală*, 1, Iaşi, 1999, pp. 79 - 80

4. *Ambiguitatea* (respectiv *indecidabilitatea*) şi reversul acesteia (*univocitatea*) se definesc în legătură cu fiecare categorie de reguli distinse de Rudolf Carnap în orizontul limbajelor "constituite". Ele anunţă acordul cu, sau inconsecvenţele ţinînd de: ☞ (1) regulile bunei formări a expresiilor (pe linia sensului *formal*, sau *morfo-sintactic*); ☞ (2) regulile *adevărului* expresiilor complexe, în raport cu adevărul constituenţilor; ☞ (3) regulile de *domeniu*: ale modelării, ale interpretării, respectiv ale verificării, sau ale decidabilităţii *stricto sensu*, mai ales în legătură cu înţelesul *denotativ*, sau *referenţial* [31]; ☞ (4) regulile *desemnării*, pentru constantele descriptive. La aceasta se adaugă, bineînţeles, şi acordul (respectiv dezacordul) cu regulile *transformării* expresiilor creditate necondiţionat sau condiţionate (ca axiome), ori în prealabil verificate (sub aspectul *intensiunii*, sau al *sensului* în accepţia cea mai strictă a cuvîntului cu pricina).

5. La toate nivelurile şi în toate orizonturile, ambiguitatea şi, *eo ipso*, indecidabilitatea, sînt *relative*, iar înfruntarea lor se face prin recursul la *context*. Este ceea ce subliniază, între alţii, Robert Stalnaker, sub auspiciile *pragmaticii formale* [32], cînd pune adevărul propoziţiei interpretate în dependenţă de *CONTEXTUL* proferării (intenţii ale locutorului în cunoaştere, credinţe, aşteptări şi interese comune interlocutorilor, acte de limbaj îndeplinite, momentul alocuţiei şi efectele acesteia, valoarea de adevăr a propoziţiei exprimate etc.) şi de *LUMILE POSIBILE* la care se referă propoziţia proferată, sau exprimată.

[31] Rudolf Carnap, *Semnificaţie şi necesitate. Un studiu de semantică şi logică modală*, trad. din engl. am., Editura Dacia, Cluj, 1972, pp. 47 - 48, 53 - 54, 224.

[32] Robert C. Stalnaker, *Pragmatics*, în: Donald Davidson and Gilbert Hermann (eds.), *Semantics of Natural Languages*, D. Reidel P. C., Dordrecht, 1972; Françoise Armengaud, *op. cit.*, pp. 44 – 45.

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

PREDICATE RECURSIV-ENUMERABILE ŞI ECUAŢII DIOFANTICE UNIVERSALE

GEORGE CEAUŞU[1]

Matematica actuală tree printr-o perioadă fastă: asistăm cu melancolie la "căderea" unor probleme mai mult decît tricentenare: ultima teoremă a lui Fermat a fost enunţată în 1637, găsindu-şi rezolvarea abia în iunie 1993, cînd Andrew Wiles, matematician al Universităţii din Princeton, uzează de poşta electronică spre a-şi anunţa prioritatea. Enunţul teoremei, de o mare simplitate (dacă $n > 2$, atunci ecuaţia $x^n + y^n = z^n$ nu are soluţii nebanale în întregi), a bulversat lumea matematicii. De fapt, Andrew Wiles a demonstrat mult mai mult, şi anume o conjectură a lui Shimura-Tanyiama-Weyl, despre care se ştia, încă din 1986, că este o generalizare lejeră a ultimei teoreme fermatiene. Kenneth A. Ribet descrie paşii rezolvării teoremei şi corelaţiile ei cu conjecturile geometriei algebrice (Ribet, 1995). Dar mai interesantă ni se pare lista domeniilor matematice angrenate în consistenta demonstraţie a teoremei: curbe eliptice, forme modulare, reprezentări de grupuri Galois, deformări, coomologie cristalină, inele locale – domenii greu de stăpînit de către un singur om, fie el şi matematician rasat!

1. "Tensiuni cordiale" între algebră, geometrie şi topologie

Matematica modernă, în viziunea "cercului bourbakist" − edificată prin anii '50 şi '60 − lucrează cu trei tipuri de structuri: geometrice, algebrice şi topologice. Algebra şi topologia şi-ar putea partiţiona problemele structurilor discrete, respectiv continue, care prin natura lor sînt deservite de noţiuni netotale. Universul, spaţiul global ar fi de competenţa geometriei. La vederea unei astfel de clasificări, geometrul, algebristul şi specialistul în analiză matematică se vor declara pe deplin satisfăcuţi de importanţa muncii lor. Chiar şi pasionatul structurilor numerice va fi mulţumit, regăsindu-se în "structurile algebrice", cu toate că "regina matematicii", teoria numerelor, este detronată în respectiva diviziune şi înlocuită cu un triumvirat jovial-didactic. Burbakiştii aveau dreptate să proclame geometria ca o ramură importantă a matematicii: domeniul este un model al spaţiului global de diferite dimensiuni, pornind de la punct (de dimensiune *0*) şi, trecînd prin linie şi suprafaţă, la spaţiu şi la hiperspaţiul *n*-dimensional, cu *n* oricît de mare. Iar finele secolului trecut rezolvă o dilemă a reprezentării spaţiului, în sensul că geometriile neeuclidiene, eliptică şi hiperbolică, coexistă cu cea euclidiană şi sînt diferenţiate de o simplă formă pătratică a ecuaţiei suprafeţei. Prin spaţiul cvadridimensional Minkovski (care este, de fapt, un spaţiu-timp), drumul teoriei relativităţii restrînse era deschis. Dar dacă *n* este oricît de mare, ce-aţi spune de spaţiul Hilbert infinit dimensional (cu o dimensiune numărabilă, totuşi)? Şi iată-ne în prezenţa geometriilor fractalice inaugurate prin ideea lui Benoît Mandelbrot (Mandelbrot, 1978), pregătiţi să discutăm şi despre o dimensiune fracţionară a spaţiului.

[1] Facultatea de Filosofie, Universitatea "Al. I. Cuza", IaşI; ceausu@uaic.ro

Prin *Programa de la Erlangen,* Felix Klein defineşte geometria ca un studiu al invarianţilor unui grup de transformări, grupul asemănărilor, şi anume

$x' = p*x + q*y + a, y' = q*x + p*y + b, cu\ p*q \cong 0,$

la care se adaugă, eventual, simetriile. Grupul de mai sus are diferiţi invarianţi fundamentali: conservă punctul, dreapta, relaţia de incidenţă, de ordine, de egalitate, paralelismul şi continuitatea. Combinînd conceptele şi invarianţii fundamentali se obţin figuri şi relaţii invariante derivate. Geometria clasică este mulţimea proprietăţilor invariante faţă de grupul de mai sus (adică a relaţiilor invariante între elementele invariante). În viziunea lui Felix Klein, a studia o disciplină matematică înseamnă a determina grupul în raport cu care noţiunile ei sînt invariante – prin identificarea acestui grup, sistemul axiomatic devine o teorie a invarianţilor fundamentali ai unui *grup de transformări* (Klein, 1926). Mulţimea propoziţilor invariante dintr-un domeniu poate fi dotată cu un grup – evident, infinit, dacă nu impunem constrîngeri mulţimii variabilelor. Dar orice relaţie din cadrul grupului poate fi atinsă cu un număr finit de operaţii cu invarianţi fundamentali. Orice teoremă între noţiuni şi relaţii poate fi, deci, demonstrată pornind de la noţiunile şi relaţiile fundamentale. Aceasta ar descrie comportamentul unui sistem axiomatic complet. Cînd îşi enunţa, însă, programul, Felix Klein, ca şi David Hilbert în primele sale monumentale axiomatizări ale geometriei, nu ştia că există şi sisteme recursiv necompletabile din punct de vedere axiomatic!

Prin grupul *transfomărilor de mulţime* putem modela relaţiile dintre noţiuni. Dacă vom ataca problematica limbajelor geometriei, putem modela o geometrie euclidiană şi una neeuclidienă, apoi o geometrie afină, a punctului, şi una vectorială, care să structureze mulţimile de puncte. Pe de altă parte, consistenţa geometriei depinde de cea a spaţiului *n*-dimensional al numerelor reale, ceea ce readuce în discuţie definirea unei aritmetici. Nu s-a reuşit nici pînă astăzi demonstrarea consistenţei aritmeticii pe un sistem axiomatic finitar: căci principiul inducţiei transfinite,

PI) dacă A (0) şi dacă, dat fiind A (i) are loc A (i + 1), atunci A (i), pentru oricare i, număr natural, unde *A*, formulă în sistem, este o schemă care conţine un număr infinit numărabil de axiome. Şi, în ciuda faptului că aritmetica e unică (o aritmetică în care ambele operaţii binare, adunarea şi înmulţirea, să fie recursive: rezultatul lui Tannenbaum), ea este, totuşi, incompletă şi chiar esenţial indecidabilă! Ceea ce înseamnă că, în ciuda construcţiei corecte sintactico-semantice, mulţimile formulelor false şi a celor adevărate nu sunt recursiv separabile; cu alte cuvinte, nu există o procedură recursivă care să dea totdeauna răspunsul *adevărat* sau *fals* în privinţa unei teoreme (corect deduse) – aşa cum vom vedea mai jos. Aritmetica întregilor, un suport de construcţie atît pentru geometrie, cît şi pentru analiza matematică, vădeşte umbre în claritatea spirituală, umbre pe care le imprimă şi celorlalte subdomenii matematice.

Un întreg domeniu este o noţiune în concepţia ansamblistă. Una mai largă, dar, totuşi, o noţiune cu sferă şi conţinut. O vom nota prin d_o. Acelaşi domeniu este o propoziţie; una ideală, strivită, poate, de proprie complexitate – dar, totuşi, o propoziţie pe care o vom desemna prin D_o. Din punct de vedere cibernetic, domeniul este un perceptron: o cutie (neagră, albă sau gri) cu mai multe eventuale intrări şi cu o ieşire obligatorie. Atît d_0, cît şi D_0, se pot codifica printr-un cod *f,* compatibil cu intrările domeniului, cel puţin într-o interpretare dată, fie aceasta *f* Atunci $f(d_0)$ şi $f(D_0)$, ca intrări, pot "hrăni" însăşi cutia cibernetică a domeniului şi astfel obţinem cunoaşterea domeniului de domeniu. În practică se întîmplă adesea ca, după ce am învăţat ceva şi am pus într-o formă (testabilă printr-un examen, de exemplu), să revenim asupra domeniului cînd întîlnim o altă sursă de sinteză – şi, astfel, vechile cunoştinţe acumulate devin un simplu cod de intrare în noua sinteză. Astfel se întîmplă şi cu domeniile matematicii.

I. R. Şafarevici (Şafarevici, 1989) ia în serios ideea *dimensionalizării*: a descompunerii unei entităţi matematice pe coordonate într-un spaţiu n-dimensional (spre deosebire, de traducătorul român al lucrării, noi vom folosi termenul de *dimensionalizare,* care ni se pare mai expresiv decît cel de *coordinatizare*). Demersul *dimensionalizării* se enunţă astfel: *orice entitate matematică se poate dimensionaliza*, însă pentru un astfel de demers conceptul de număr este insuficient şi sînt necesare "generalizări" ale numărului de tipul *polinom, funcţie algebrică* şi multe altele – în general, *mărime* mai mult sau mai puţin măsurabilă. Şi atunci ce ne facem cu aspiraţia spre perfecţiunea numerelor naturale? O vom reitera după ce vom atinge, în treacăt, şi problemele continuităţii.

O curbă plană C se poate scrie sub forma unui polinom, $f(x, y) = 0.$ Asociind curbei mulţimea coeficienţilor polinomului, vom obţine un mod primitiv de dimensionalizare. Creşterea eficienţei acestei dimensionalizări creşte în momentul cînd se consideră polinoame ireductibile (sînt acele polinoame neconstante care nu mai pot fi descompuse în produse finite de polinoame neconstante peste acelaşi corp polinomial). Vom presupune polinomul f ireductibil şi vom considera o funcţie raţională oarecare φ de două variabile. Ea se poate scrie ca un cît de polinoame, $\varphi(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$ şi nu va fi definită în acele puncte în care are loc, simultan, $P(x, y) =0$ şi $f(x, y) = 0.$ În ipotezele făcute mai sus, aceste puncte vor fi doar în număr finit. Putem presupune curba C ca avînd un număr infinit de puncte (de exemplu, curbe cu coordonate complexe). Funcţia φ determinată de mulţimea punctelor curbei C (vom spune pe scurt *de pe curba* C) este o funcţie care, eventual, nu este definită într-un număr finit de puncte. Precauţia luată în legătură cu valoarea 0 se datorează necesităţii existenţei obligatorii a inversei $\varphi^{-1}(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$ – care satisface aceleaşi condiţii ca şi funcţia φ. În acest fel am obţinut *funcţiile raţionale de pe curba* C, alcătuind corpul funcţiilor raţionale pe curba C, $R(C)$ (extindere a corpului R al numerelor reale). Considerînd puncte cu coordonatele într-un corp K, îi putem asocia puncte din R şi reciproc. Prin asocierea corpului $K(C)$ la curba C, obţinem o dimensionalizare mai elegantă a curbei decît prin asocierea coeficienţilor ecuaţiei polinomiale, deoarece, prin trecerea de la sistemul de coordonate plane (x, y) la (x', y'), în ciuda modificării ecuaţiei curbei şi a înlocuirii corpului C cu C', există un izomorfism peste K între corpurile $K(C)$ şi $K(C')$.

Este uşor de demonstrat că, dacă C este o curbă de gradul 2, atunci corpul $K(C)$ este izomorf chiar cu $K(t)$, corpul funcţiilor raţionale de o variabilă, unde t este coficientul unghiular ce uneşte un punct fix (x_0, y_0) al curbei cu punctul (x, y) de coordonate variabile. În final, vom obţine expresiile $x = g(t)$, $y = h(t)$ şi relaţia $f(g(t), h(t)) = 0.$ Astfel, dacă îl înlocuim pe x cu $f(t)$, pe y cu $g(t)$ şi, în general, pe $\varphi(x, y)$ cu $\varphi(g(t), h(t))$, obţinem un izomorfism al corpurilor $K(C)$ şi $K(t)$ peste K.

Din acest moment apar rezultate interesante prin care (parţiala) decidabilitate a unui domeniu se transportă pe un alt domeniu prin intermediul izomorfismului dintre cele două corpuri. Datorită faptului că între funcţiile raţionale *sin* şi *cos* există relaţia $sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$, iar ecuaţia /(normată) a cercului în plan este $x^2 + y^2 = 1$, există un izomorfism între $R(C)$ şi $R(t)$, cu alte cuvinte orice ecuaţie trigonometrică poate fi adusă la o anumită ecuaţie algebrică de grad doi. Aceasta înseamnă că trigonometria plană este echivalentă cu teoria unor curbe algebrice de grad doi! Problema decidabilităţii unei teorii este transportată în cealaltă teorie. Ceea ce nu se întîmplă, însă, cu trigonometria sferică sau cu cea hiperbolică, pentru care trebuie găsite alte tipuri de curbe algebrice! Deja pentru o ecuație $y = x^3 + 1$, după cum observă şi I. R. Şafarevici, care furnizează acest exemplu (Şafarevici, 1989, p. 21), corpul $K(C)$ nu mai este izomorf cu corpul $K(t)$ al funcțiilor raționale de o variabilă. În cazul ecuației $x^2 + y^2 = 1$, curba este chiar *modulară,* adică admite parametrizarea celor două variabile x şi y după o singură variabilă t.

Ne raportăm din nou la ecuația $f(x, y) = 0$, unde f este un polinom căruia îi vom asocia o curbă C. Cînd curba este suficient de netedă (cum se întîmplă cu ecuația $x^n + y^n = 1$ derivată din marea teoremă a lui Pierre Fermat), atunci genul ei este $g = (n-1)(n-2)/2$. Deci, pentru $n \geq 2$, $g \geq 4$. Topologic, soluțiile ecuației de mai sus peste corpul numerelor complexe, cu excepția unui număr finit de puncte, formează o suprafață compactă Riemann şi atunci genul este chiar genul uzual al acestei varietăți reale bidimensionale. Analitic, o suprafață Riemann este o varietate complexă unidimensională şi se poate defini noțiunea de *formă olomorfă unidimensională*. Atunci genul este numărul maxim al formelor olomorfe unidimensionale peste suprafață. Iată-ne în situația să înțelegem noțiunea de gen al curbei numai prin colaborarea topologiei, analizei complexe şi a geometriei diferențiale. De exemplu, sfera Riemann din teoria integralei are genul 0, astfel încît ea nu are forme olomorfe unidimensionale, cîtă vreme ecuația curbei eliptice $y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ are genul 1 pînă la o constantă, elementul diferențial dx/y fiind singura ei formă olomorfă unidimensională. (Cox, 1996). Punctelor raționale ale curbei C, reprezentate de ecuația $f(x, y) = 0$, pot fi clasificate prin genurile lor dacă vom considera un model nesingular proiectiv $C(Q)$ al curbei peste corpul complex – Q este mulțimea numerelor raționale. În 1922, Mordell conjecturează şi în 1983 Gerd Faltings demonstrează următorul rezultat profund:

Teoremă. Dacă genul curbei C este mai mare sau egal cu 2, atunci mulțimea $C(Q)$ este finită.

Demonstrația nu este efectivă, în sensul că G. Faltings nu găseşte un algoritm pentru generarea punctelor finite; există o marginea superioară a soluțiilor efective care nu ajută la găsirea lor. În alți termeni, o curbă netedă, dar suficient de "urîtă", cum ar fi $x^{131} + y^{25} = 1$, al cărei gen depăşeşte numărul doi, are un număr finit de puncte raționale, care pot fi căutate cu calculatorul – problema determinării soluțiilor este deci decidabilă!

Prin intermediul răspunsului afirmativ la Conjectura lui Mordell putem emite cîteva considerații asupra rezultatului furnizat de teorema referitoare la diofanticitatea predicatelor recursiv-enumerabile.

Totuşi, informatica şi logica...

În jurul manipulării datelor prin algoritmi se poate face o teorie a decidabilității cu o solidă fundamentare teoretică – fără, însă, a neglija programarea, implementarea şi testul acestora. *Algoritmul* este o secvență de operații, instrucțiuni sau comenzi, orientată spre rezolvarea unei probleme, scrisă într-un limbaj prestabilit şi avînd la bază un model cibernetic. *Data* este o reprezentare standardizată care poate fi supusă prelucrării automate. Din punctul de vedere al teoriei calculabilității, algoritmii au un caracter funcțional, iar datele unul structural; algoritmii reprezintă componenta dinamică, iar datele, componenta statică a unui program. În practica programării, formula lui Niklaus Wirth (Horowitz, 1984), inventatorul Pascalului *(program = algoritmi + date)* coexistă cu altele, care dau naştere unui comentariu pertinent, cum ar fi cel a lui Robert Kowalski din programarea logică: *program = logică + control* (Kowalski, 1979).

Algoritmul ne parvine sub două aspecte: *reprezentarea* sa şi *calculul* indus de o mulţime precizată de variabile de intrare. Algoritmul se înscrie ca o secvenţă de instrucţiuni sub diverse pseudocoduri. Ca şi conceptul de mulţime, algoritmul tinde să devină un concept primar al matematicii, ceea ce nu se sfiesc să proclame anumite curente intuiţioniste (Dalen, 1986), ceea ce înseamnă că o simplă descriere cum este cea de mai sus încă nu convine. Între caracteristicile algoritmului, cărora o întreagă literatură, inclusiv didactică, le acordă atenţie este finitudinea reprezentării, ceea ce nu exclude infinitudinea calculului. Ca exemplu, algoritmul lui Euclid. El rezolvă următoarea problemă: *date două numere naturale a şi b ε N; să se găsească cel mai mic multiplu comun şi cel mai mare divizor comun al lor.* Strategia constă în aflarea restului împărţirii lui *a* la *b*; atîta vreme cît acesta este diferit de zero, se continuă operaţia cu *b* în locul lui *a* şi *r* în locul lui *b.* Cînd restul a devenit zero, se prelevează c. m. m. m. c. din celula *b.*

Reprezentarea acestui algoritm, în pseudocod Pascal sau Basic, este alcătuită din cîteva linii de program iar *calculul* este dat de un tabel cu celulele *a, b, r* şi cu valoarea lor din pas în pas pentru exemple numerice date. În numeroase cazuri, o reprezentare finită nu garantează un calcul finit. *Există şi algoritmi care nu se opresc întotdeauna.* Nici problema opririi algoritmului lui Euclid nu este banală: trebuie observat că în celula *r,* care conţine numere naturale, acestea sînt din ce în ce mai mici (prin teorema chineză a resturilor) şi astfel avem garanţia că, la un moment dat, în celulă se va afla $r = 0$ – moment în care algoritmul se termină. Pe parcursul acestui drum, el calculează o funcţie parţial-definită.

O *funcţie* (parţială) este o relaţie matematică de tip $(m, 1)$ – de la mai mulţi la unul singur. Un alt tip de relaţie se numeşte *cod* – relaţie de tip $(1, m)$ total definită. De fapt, problemele decidabilităţii, pentru a fi discutate, nu se pot pune în limbaj de funcţie, ci de predicate şi de mulţimi. Un predicat *P* este o funcţie total definită peste o mulţime de date *D* şi luînd valori în mulţimea valorilor logice, $\{1, 0\}$: $P : D \rightarrow \{1, 0\}$. Există funcţii calculabile, care corespund predicatelor recursive şi mulţimilor recursive, dar nu există funcţii recursiv-enumerabile decît în măsura în care punem problema *funcţiilor universale peste un domeniu* (a acelor funcţii care generează toate punctele domeniului, eventual cu repetiţii). Deci pentru rezolvarea unei probleme un algoritm trebuie să efectueze calculul unei funcţii, enumerarea unui cod, decizia unui predicat sau generarea unei mulţimi – şi astfel se aplică unor noţiuni matematice care pot fi tratate mai eficient (Alagi◈, 1978). Accepţia termenului de problemă este una foarte largă, intrînd în domeniul filosofic, psihologic, matematic – ne-am ocupat în alte lucrări de modele ale problemei: logic, funcţional, cibernetic (Ceauşu, 1998).

Problema este, la urma urmei, o dificultate care se cere soluţionată. S-ar putea ca ea nici să nu aibă rezolvare. Astfel sîntem nevoiţi să punem în legătură algoritmul şi cu idei matematice mai simple: funcţie, predicat, mulţime. Există probleme foarte grele care nu pot fi rezolvate nici pe calculator, numite *greu tractabile*, multe dintre ele fiind *NP-complete* (Garey; Johnson, 1979). Există tipuri de algoritmi care nu se opresc pentru anumite seturi de date şi conduc la soluţie pentru alte seturi de date – însă complexitatea *funcţiilor-timp* sau *spaţiu* asociate algoritmului este un parametru esenţial pentru eficienţa implementării (Kozen, 1992). Corespunzător acestei ierarhii a problemelor, există funcţii recursive (calculabile) sau nu; predicate nedecidabile (care nu pot fi decise), parţial decidabile şi decidabile; mulţimi nerecursive-enumerabile, recursiv-enumerabile şi recursive; algoritmi nerecursivi, algoritmi recursivi-enumerabili şi recursivi. Teoria calculabilităţii efective şi teoria complexităţii exprimă esenţa informaticii, partea ei cea mai stabilă, conducînd la rezultate de marcă în teoria decidabilităţii.

În cazul sistemelor formale, consistenţa şi completitudinea sistemului influenţează decidabilitatea, pentru că sistemele inconsistente sau incomplete afectează uneori grav "motorul" deducţiei teoremelor. Fie L şi P două mulţimi infinit numărabile numite, respectiv, *alfabet de simboluri* şi *alfabet de demonstraţii*, la care se adaugă mulţimea $T \subseteq L^{*}$, ale cărei elemente se numesc *afirmaţii adevărate*. Se mai consideră mulţimea $D \subseteq P^{*}$, ale cărei elemente se mai numesc *demonstraţii*. Se mai presupune că D este recursivă (decidabilă) în P^{*}. Considerăm funcţia calculabilă totală $\delta: D \to L^{*}$. Pentru orice $d \in D$, $\delta(D)$ este cuvîntul (din L^{*}) a cărei demonstraţie este D.

Definiţie. Tripletul $<P, D, \delta>$ se numeşte *sistem deductiv* peste L. Acesta este *semantic consistent* pentru $<L, T>$ dacă $\delta(D) \subseteq T$ şi *semantic complet* pentru $<L, T>$ dacă $T \subseteq \delta(D)$.

Definiţia de mai sus admite o relativizare. Fie $V \subseteq L^{*}$, $Q = \delta(D)$. Sistemul deductiv $<P, D, \delta>$ este *semantic consistent relativ la V* dacă $V \cap Q \subseteq V \cap T$; este *semantic complet relativ la V* dacă $V \cap T \subseteq V \cap Q$.

Definiţia de mai sus este de o maximă generalitate; nu se mai specifică, la fel ca în consistenţa sintactică, un procedeu deductiv în funcţie de care să se stabilească teoremele, ci mulţimea acestora este o imagine a funcţiei cuprinsă în D la modul cel mai general. În aceeaşi interpretare, relaţiile de definiţie prin mulţimi ale consistentei şi completitudinii sînt converse ($\delta(D) \subseteq T$, relativ la $T \subseteq \delta(D)$), asigurîndu-se astfel o oarecare omogenitate în tratarea celor două tipuri de proprietăţi. Iar rezultatele nu întîrzie să apară: dacă T este recursiv-enumerabilă, atunci se poate determina un sistem deductiv semantic consistent şi complet pentru $<L, T>$; mulţimile D şi $\delta(D)$ sînt recursiv-enumerabile; nu există un sistem deductiv care să fie semantic consistent şi complet relativ la V pentru $V \subseteq L^{*}$, cu V recursiv-enumerabil şi $V \cap T$ ne-recursiv enumerabil; un sistem deductiv este semantic complet şi consistent pentru $<L, T>$ atunci şi numai atunci cînd este semantic complet şi consistent relativ la orice submulţime $V \subseteq L^{*}$ (Ceauşu, 1998).

După cum ştim, aritmetica formală Peano, notată $P = (0, ', +, \cdot, =)$ permite construcţia formulelor (bine formate), apoi a interpretării standard. Pe baza acesteia putem defini perechea fundamentală $<P, T>$, unde T este mulţimea formulelor închise *i*-valide ale aritmeticii. Exprimabilitatea unei mulţimi de numere naturale se defineşte astfel: *apartenenţa* la o mulţime de numere naturale S este *exprimabilă* prin perechea fundamentală $<L, T>$ dacă există o funcţie calculabilă (care *exprimă* apartenenţa la S), $f: N \to L^{*}$, astfel încît: *i)* dacă $n \in S$, atunci $f(n) \in T$; *ii)* dacă $n \in N \setminus S$, atunci $f(n) \in L^{*} \setminus T$. Vom mai consemna definiţia *aritmeticităţii* unei mulţimi: o mulţime M este *aritmetică* dacă există o formulă A cu cel mult o variabilă liberă x, astfel ca $M = \{ a \mid A(x/a) \text{ este validă } \}$. Se observă că apartenenţa la orice mulţime M este exprimabilă prin $<A, T>$.

Exprimabilitatea unei mulţimi de numere naturale prin perechea fundamentală $<L, T>$ stă la baza următorului rezultat de existenţă: dacă există o mulţime de numere naturale ne-recursiv enumerabilă şi exprimabilă prin perechea fundamentală $<L, T>$, atunci nu există un sistem deductiv semantic consistent şi complet pentru $<L, T>$. Mai rămîne de arătat că există mulţimi aritmetice care nu sînt recursiv-enumerabile – prin considerarea unei codificări de tip K. Gödel pentru mulţimea formulelor exprimabile, respectiv inexprimabile

– şi astfel sîntem în prezenţa unui mecanism de producere a sistemelor semantic consistente şi incomplete şi a unui rezultat fundamental al demersului de pînă acum: nu există sisteme deductive semantic consistente şi complete pentru perechea fundamentală $\langle A, T\rangle$. Este o generalizare semantică a primei teoreme de incompletitudine (pentru aritmetica formală cu setul de axiome al lui G. Peano) a lui K. Gödel. Din rezultatele de pînă acum rezultă că aritmetica formală este ne-recursivă – nici măcar recursiv-enumerabilă, cum este cazul calculului predicaţional într-o formalizare deductivă de tip Hilbert-Ackermann.

Punerea în corespondenţă a consistenţei şi completitudinii sintactice cu proprietăţile corespunzătoare semantice este imediată: sistemul deductiv $\langle P, D, \delta\rangle$ este (sintactic) consistent dacă nu există o formulă B astfel încît $B, B \in \delta(D)$; este complet cînd $B \in \delta(D) \vee B \in \delta(D)$ pentru oricare B, formulă închisă. Legătura dintre consistenţa / completitudinea semantică şi cea sintactică este dată prin următorul rezultat enunţat prin cazuri: *i)* un sistem deductiv semantic consistent este consistent; *ii)* un sistem deductiv semantic complet este complet; *iii)* un sistem deductiv semantic consistent este şi semantic complet atunci şi numai atunci cînd el este complet.

Vom ajunge chiar la ideea că există sisteme deductive care nu pot fi completate iar aritmetica formală luată în discuţie este unul dintre ele. Pentru extensia unui sistem deductiv, vom folosi următoarea

Definiţie. Fie $\langle P_0, D_0, \delta_0\rangle$ şi $\langle P, D, \delta\rangle$ două sisteme deductive. Spunem că $\langle P, D, \delta\rangle$ este o *extensie* a lui $\langle P_0, D_0, \delta_0\rangle$ dacă $\delta(D_0) \subseteq \delta(D)$. Spunem că un sistem deductiv $\langle P_0, D_0, \delta_0\rangle$ este *completabil* dacă există o extensie $\langle P, D, \delta\rangle$ care este consistentă şi completă. Astfel de sisteme se pot construi prin tehnica *separabilităţii.* Fie K un alfabet şi $A, B, C \in K^*$, A şi B fiind disjuncte. Spunem că *C separă A de B* dacă există o mulţime C recursivă în K^*, care separă A de B.

Proprietatea de separabilitate stă la baza următorului rezultat: dacă mulţimea formulelor închise deductibile şi cea a formulelor închise nedeductibile dintr-un sistem deductiv sînt inseparabile, atunci respectivul sistem este necompletabil.

Ată deci că, sub o anumită ipoteză, un sistem formal este necompletabil. Problema ar fi dacă astfel de tipuri de sisteme există; însă ele se pot construi efectiv pornind de la inseparabilitatea celor două mulţimi aritmetice care exprimă formulele deductibile ale sistemului şi pe cele nedeductibile.

Teoremele de incompletitudine gödeliene suportă conexiuni cu alte rezultate celebre ale sistemelor formale şi ale teoriei calculabilităţii efective (Tarski, Matiasevici-Putnam-Davis-Robinson) şi diverse relativizări pentru mulţimile de ipoteze consistente. Un interesant rezultat al lui Alfred Tarski se referă tot la aritmetica formală şi este conectat cu rezultatul lui Kurt Gödel: mulţimea formulelor adevărate ale aritmeticii este nearitmetică. În prealabil, trebuie definită *aritmeticitatea* unei mulţimi de formule $M \subseteq A^*$ (respectînd o anumită enumerare). Se spune că două enumerări sînt *aritmetic echivalente* dacă funcţia care duce numărul unui cuvînt într-o enumerare în numărul lui dintr-o altă enumerare este o funcţie aritmetică.

Relativizarea mulţimilor de ipoteze consistente sau complete ar putea fi o altă cale prin care rezultatele de incompletitudine gödeliene să capete extensii semnificative peste anumite tipuri de teorii necompletabile. Vom schiţa un demers de obţinere a unor sisteme deductive din altele. Pe această cale, se pot defini mulţimile I de ipoteze *i-consistente* şi *i-complete* (unde i este un model pentru mulţimea de ipoteze); apoi *i-J-consistente* şi *i-J-complete.* Mulţimea de ipoteze I este *i-consistentă* dacă $PD(I) \subseteq PV(I)$ şi *i-completă* dacă $PV(I) \subseteq PD(I)$. Fie J o mulţime de propoziţii. Mulţimea de propoziţii I este *i-J-consistentă* dacă $J \cap PD(I) = J \cap PV(I)$ şi *i-J-completă* dacă $J \cap PV(I) = J \cap PD(I)$. Se demonstrează uşor că, date fiind I, o mulţime de propoziţii şi i o interpretare, au loc următoarele implicaţii: *i)* dacă I este *i*-consistentă, atunci I este consistentă; *ii)* dacă I este *i*-completă, atunci I este completă; *iii)* dacă I este *i*-consistentă, atunci noţiunile de *i*-completitudine şi de completitudine pentru mulţimi de propoziţii sint echivalente. Vom putea astfel relativiza cîteva dintre rezultatele dinainte, folosindu-ne şi de noţiunea de *i-exprimabilitate.* Luînd în considerare aritmeticitatea unor mulţimi de acest gen, vom putea obţine următoarele rezultate, extensii relativizate ale primei teoreme gödeliene de incompletitudine: *i)* în aritmetica formală nu există mulţimi recursiv-enumerabile de propoziţii care să fie *i*-consistente şi *i*-complete; *ii)* în aritmetica formală există mulţimi enumerabile şi necompletabile de propoziţii.

Din rezultatele de mai sus se observă o relaţie subtilă între consistenţă, completitudine (cu rafinările lor în funcţie de existenţa unui model *i*: *i*-consistenţă, *i*-completitudine), pe de o parte, şi exprimabilitate şi recursivă-enumerabilitate, pe de alta; cîtă vreme primele două sînt proprietăţi intrinseci, definite şi luînd valori în sistemul însuşi celelalte două iau valori în afara sistemului, proiectîndu-l, de regulă, în alte ramuri ale matematicii. Facem această precizare deoarece deseori se confundă incompletitudinea cu indecidabilitatea. Calculul propoziţional construit cu operatorul "$\Rightarrow$" (calcul implicaţional) este un sistem incomplet şi recursiv; calculul cu predicate pur (numai cu predicate, nu şi cu funcţii) este complet şi recursiv-enumerabil (în condiţiile în care nu se fac ipoteze restrictive asupra matricii de cuantori a formulelor în forma prenex); aritmetica formală în axiomatica lui Giuseppe Peano este incompletă (în ipoteza consistenţei ei) şi nici măcar recursiv-enumerabilă, fiind recursiv necompletabilă. Recursiva separabilitate a formulelor adevărate şi a celor false şi recursiva necompletabilitate sînt proprietăţi-cheie care influenţează enumerarea recursivă a sistemului. De altfel, extinderea unui sistem prin procedee inspirate de completitudine se aplică astăzi bazelor de cunoştinţe modelate cu ajutorul logicilor nemonotone. Ipoteza lumii închise (a lui R. Reiter) şi completarea predicatului (K. L. Clark) sînt astfel de procedee prin aplicarea cărora problema decidabilităţii sistemului rămîne deschisă (Grégoire, 1990).

3. O matematică a ecuaţiilor diofantice?

A reduce teoria predicatelor recursiv-enumerabile la una de polinoame diofantice (avînd drept coeficienţi numere întregi) este o uriaşă tentaţie la care nici un matematician rasat nu putea renunţa, datorită a două aspecte:

i) predicatele recursiv-enumerabile modelează fenomenul de parţială decidabilitate, deci trasează o limită clară între problemele finite din informatică şi cele infinite; dintre cele "rezolvabile prin tehnici finitare pe mulţimi infinit numărabile", şi "irezolvabile prin tehnici finitare". Or, predicatele recursiv-enumerabile sînt adesea dificil de reprezentat pe calculator, ceea ce nu se întîmplă cu numerele întregi;

ii) teoria predicatelor recursiv-enumerabile comunică destul de greu cu alte domenii matematice, în vreme ce polinoamele diofantice sînt foarte mult studiate, au aplicaţii didactice gimnaziale, sînt corelate cu duzini de teorii şi domenii speciale (reprezentări Galois, grupuri de transformări, suprafeţe riemanniene, curbe eliptice, reprezentări *p-adice* etc.) şi fac obiectul unor studii matematice foarte intense, fructificate în secolul abia trecut prin rezolvarea în sens pozitiv a Conjecturii lui Mordell şi a Conjecturii Tanyama-Shimura-Weyl, ultimul rezultat ducînd la rezolvarea tricentenarei "mari teoreme a lui Fermat". Atîta vreme cît predicatele diofantice nu vor fi studiate în corelaţia lor cu alte structuri algebrice, geometrice şi topologice, cunoaşterea logico-matematică nu va avea suficient de multe modele intuitive pentru a da un impuls revoluţionar elucidării teoriei predicatelor recursiv-enumerabile.

În teoria calculabilităţii ideea de problemă (parţial) decidabilă este modelată prin cea de predicat recursiv-enumerabil. Vom nota prin *DI* o mulţime de date de date de intrare şi vom considera mulţimea *B* a valorilor de adevăr şi de fals, $B = \{ 0,\ 1 \}$. Se numeşte *problemă de decizie* o funcţie de tipul $P\colon DI \rightarrow B$. Problema *P* este *parţial decidabilă (semidecidabilă)* dacă există un algoritm *A* cu următoarea comportare: pentru orice $x \in DI$, se opreşte după un număr finit de paşi atunci şi numai atunci cînd $P(x) = 1$. Problema *P* este *parţial decidabilă* dacă există un algoritm *A* care, pentru orice $x \in DI$, se opreşte după un număr finit de paşi, furnizînd la ieşire valoarea $A(x)$. Observăm că orice problemă *parţial decidabilă este şi decidabilă*, deoarece valorile $A(x)$ furnizate la ieşirea algoritmului oprit după un număr finit de paşi îndepllinesc automat condiţia $P(x) = 1$. În sensul cel mai larg, în interpretarea funcţională, o problemă s-ar putea lua ca o funcţie de la o mulţime de date de intrare la una de date de ieşire: $f\colon DI \rightarrow DE$. Observăm că algoritmul rezolvă o problemă în sensul cel mai larg şi decide o problemă decidabilă. Să ne amintim că *un algoritm rezolvă o problemă, generează o mulţime, decide un predicat, calculează o funcţie şi enumeră un cod.* Am observat că parţiala decidabilitate a problemei nu se poate exprima prin funcţii, ci prin predicate şi mulţimi iar mulţimile pot fi asimilate cu predicatele prin intermediul funcţiei caracteristice. Rămîne să definim parţiala decidabilitate pentru predicate aritmetice *n-are* (de tipul $P\colon N^n \rightarrow B$, *N* fiind mulţimea numerelor naturale), cu $n > 0$, iar noţiunea matematică riguroasă pentru acest comportament este *recursiva enumerabilitate.*

Predicatul aritmetic *n-ar P* este *recursiv-enumerabil* $(n > 0)$ dacă există un predicat recursiv *R* cu $n + m$ variabile $(m \geq 0)$ astfel că, pentru orice $x_1, \ldots, x_n$,

$$P(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \exists y_1 \ldots \exists y_m\, R(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Din definiţie, rezultă imediat că orice predicat recursiv este şi recursiv-enumerabil. Se poate demonstra că predicatul *R* se poate "ajusta" chiar la unul primitiv-recursiv cu o singură variabilă legată (existenţial) în plus faţă de variabilele sale libere şi că are un comportament recursiv faţă de operatorii logici cunoscuţi, ceea ce conduce la un rezultat de dihotomie cu multe aplicaţii (teorema lui E. L. Post): *predicatele P şi ¬P sînt recursiv enumerabile atunci şi numai atunci cînd P şi ¬P sînt recursive* (Cazacu, 1996). Aplicată la ideea de mulţime, recursiva-enumerabilitate produce definiţia: mulţimea aritmetică *n*-ară $M \subseteq N^n$ este recursiv-enumerabilă dacă predicatul ei de apartenenţă "$(x_1, \ldots, x_n) \in M$" este recursiv enumerabil. Este iarăşi interesant acest rezultat de dihotomie: dacă M_1, M_2 sînt mulţimi enumerabile de *n*-uple, atunci există două mulţimi enumerabile M'_1, M'_2, disjuncte, astfel încît $M_1 \cup M_2 = M'_1 \cup M'_2$.

Trecerea la domeniul aritmeticii este permisă de predicatele diofantice şi funcţiile diofantice: predicatul *n*-ar *P* este *diofantic* dacă există un polinom *p* cu coeficienţi întregi astfel ca:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \exists y_1 \ldots \exists y_t\ p(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t),$$

unde $t \geq 0$. Funcția total definită f este diofantică dacă predicatul "$f(x_1, ..., x_n) = y$" este diofantic. Rezultatul de forță al acestei cercetări este următorul:

Teoremă. Un predicat aritmetic este recursiv enumerabil atunci şi numai atunci cînd este diofantic (Matiasevici, 1970).

Finalizarea demonstrației a necesitat eforturile unor matematicieni celebri, cum ar fi Martin Davis, Hilary Putnam, Julia Robinson, Iurii V. Matiasevici şi G. V. Ciudnovski. Teorema de mai sus conduce la rezolvarea *problemei a zecea a lui Hilbert (a rezolvabilității unei ecuații diofantice oarecare)* care, în termenii teoriei edificate, sună astfel:

Problema HI. Fiind dată o ecuație diofantică cu un număr oarecare de necunoscute, să se indice un algoritm recursiv care să o rezolve.

Problema constă de a decide pe cale algoritmică, pentru *orice* ecuație

$p(x_1, ..., x_n) = 0,$

unde p este un polinom cu coeficienți întregi, dacă acceasta are soluții în numere întregi.

Aplicarea teoremei de mai sus asupra problemei **HI** conduce la un rezultat negativ de mare răsunet (după ce, în prealabil, se face reducerea problemei **HI** la **HN** – aceeaşi problemă aplicată ecuațiilor diofantice avînd drept coeficienți numerele naturale): *problema **HI** este algoritmic nedecidabilă*. Deci mulțimea ecuațiilor diofantice este un întreg univers, care permite, pentru diversele clase de soluții, şi recursivitate, şi recursivă enumerabilitate, şi nerecursivitate. Iar aceste clase de soluții se pot considera după "forma" particulară a ecuației, după aspectul geometric al punctelor care furnizează soluții nebanale, după numărul de variabile al ecuației, gradul ei, genul ei ş. a. m. d. Dar nouă ne va atrage atenția un rezultat pozitiv derivat din aceeaşi teoremă (Cazacu, 1996, p. 130):

Teoremă. Pentru orice $n > 0$ există un număr natural r şi un polinom u cu coeficienți întregi astfel încît, pentru orice predicat recursiv-enumerabil n-ar P există o infinitate de numere naturale a care satisfac echivalența:

$P(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow \exists y_1 ... \exists y_r \, (u(a, x_1, ..., x_n, y_1, ... , y_r) = 0).$

Pentru $n = 1$, ecuația din paranteză se numeşte *ecuație diofantică universală.* Această teoremă garantează deci existența ecuațiilor diofantice universale pentru diversele teorii deductive recursiv-enumerabile. Ecuațiile diofantice universale, ca şi funcțiile universale, conduc la enumerarea punctelor unui întreg domeniu (cu eventuale repetiții). Complexitatea unei ecuații diofantice universale poate fi apreciată după numărul r de necunoscute diferite de a, x, precum şi după gradul g al polinomului u. În lucrarea citată, J. P. Jones pune în evidență mai multe perechi posibile de numere (r, g) specifice ecuațiilor diofantice universale: $(58, 4)$, $(29, 12)$, $(24, 36)$ şi aşa mai departe.

Avem astfel la dispoziție un instrument de tratare comun atît pentru teorii decidabile, cît şi pentru cele parțial decidabile – milenara teorie a ecuațiilor diofantice. În lumina acestor rezultate, rezolvarea afirmativă a conjecturii lui Mordell recomandă genul unei curbe algebrice, pe lîngă numărul r al necunoscutelor şi gradul g al polinomului universal ca fiind o bună bază de discuție pentru ecuațiile diofantice universale dedicate diverselor domenii geometrice, analitice şi topologice ale matematicii – aparent mai puțin "primitoare" pentru ecuațiile diofantice.

Ca o consecință a teoremei lui E. L. Post, dacă P este un predicat nerecursiv, dar recursiv-enumerabil, atunci P nu este recursiv-enumerabil iar rezultatul se poate aplica asupra *principiului de completitudine* a unui domeniu. Din teorema lui Iu. V. Matiasevici şi din cîteva corelații realizate de J. P. Jones rezultă că orice rezultat matematic cu o demonstrație într-o teorie finit axiomatizabillă se poate exprima într-un limbaj de polinoame diofantice (cu coeficienți întregi), constînd din cel mult o sută de adunări şi de multiplicări de întregi!

Privind clasifiarea bourbakistă, logicianul şi informaticianul pot fi profund nemulțumiți: cum, atît de puțin reprezintă logica şi informatica în ansamblul matematicii, încît ele trebuie să se re-obțină la nesfîrşit prin combinarea celor trei structuri de bază? În acest articol ne-am situat pe o poziție care s-ar putea numi "paranoică", enunțată printr-o teză susținută în articolul a doi dintre protagoniştii rezultatului invocat mai sus (Jones; Matiasevici, 1984):

Teză. Problemele cu ecuații diofantice reprezintă *aproape* toată matematica.

Însă acel *aproape* este unul dur, greu de demolat. Miza lui este *aproape* întreaga cunoaştere ştiințifică, neobositul drum spre mathesis universalis.

BIBLIOGRAFIE

1. Alagič, Suad; Arbib, Michael A., *The Design of Well Structured and Correct Programs*, Springer-Verlag, New York, 1978.
2. Cazacu, C., 1996, *Teoria calculabilității efective*, Editura Universității "Al. I. Cuza", Iaşi, cap. al IV-lea şi al V-lea.
3. Ceauşu, George, *Teoremele de incompletitudine ale lui Gödel – semnificații logice şi aplicații extralogice* (teză de doctorat), Universitatea "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998, cap. al III-lea.
4. Cox, David A, 1996, *Introduction to Fermat's Last Theorem,* "The American Mathematical Monthly " / Jan. 1996, pp. 3-14.
5. Dalen, Dirk van, 1986, *Intuitionistic Logic*, în: Gabbay, D.; Guenthner, F. (ed.) *Handbook of Philosophical Logic,* vol. al III-lea, D. Reidel Publ. Comp, Amsterdam, pp. 225-339.
6. Garey, M. R., Johnson, D. S., 1979, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,* W. H. Freeman, San Francisco, 215 sqq.
7. Grégoire, Eric, 1990, *Logiques non monotones et inteligence artificielle,* Hermès, Paris, cap. al II-lea.
8. Jones, J. P.; Matijasevič, Yu. V., 1984, *Register machine proof of the theorem on exponential diophantine reprezentation of enumerable sets,* "The Journal of Symbolic Logic", an 49, nr. 3.
9. Klein, Felix, 1926, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert,* Bd. 1, Springer, Berlin.
10. Kozen, Dexter, 1992, *The Design and Analysis of Algorithms*, Springer-Verlag, New York, pp. 111-133.
11. Kowalski, Robert, 1979, *Logic for Problem Solving*, North Holland, New York.
12. Horrowitz, Ellis, 1984, *Fundamentals of Programming Languages*, Springer-Verlag, Berlin, 1984, cap. al II-lea.
13. Mandelbrot, Bennoît, 1978, *Fractals: Form, Chance, and Dimension*, W. H. Freeman and Comp., W. H. Freeman, San Francisco.
14. Matiasevici, Iu. V., 1970, *Diofantovosti perecislimyh mnnojestv,* "Doklado Akademija Nauk", 191:2.
15. Ribet, K. A., *Galois Reprezentations and Modular Forms*, "Bulletin of American Mathematical Society ", 32, 1995, 4, pp. 375-402.
16. R. Şafarevici, 1989, *Noțiunile fundamentale ale algebrei,* Editura Academiei, Bucureşti, cap. I.

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

DIN NOU INCOMPLETITUDINEA

VIRGIL DRĂGHICI

Incompleteness again

Abstract

This paper inteds a succint analysis of the way in which the phenomenon of incompletenss works as an argument in contemporary controversy about realism-antirealism, the meaning of mathematical concepts, the new foundation of the logicist program. Firstly, it argues the impossibility of bringing together, in a coherent theory, of the wittgensteinian thesis "meaning is use" (and the afferent ones) and the rehabilitation of the logicist program.

Una dintre cele mai importante descoperiri a secolului al XX-lea este fenomenul incompletitudinii. Sensul său a fost coerent explicitat prin prestaţia remarcabilă a lui Gödel.[1]

Th.G1. *Dacă un sistem formal S este (simplu) consistent, atunci S conţine o propoziţie G, exprimabilă în termenii sistemului, astfel că non $\vdash_S G$; dacă sistemul formal este ω-consistent, atunci non $\vdash_S \neg G$. (Aşadar, G este o propoziţie indecidabilă pentru S şi deci S este incomplet).*

Th.G2. *Dacă sistemul formal S este consistent (cu Con formula care exprimă consistenţa), atunci $\vdash_S Con$.*

Propoziţia G din Th.G1 are forma $\forall x F(x)$, cu $F(x)$ predicat decidabil,[2] exprimabilă în S dar nedemonstrabilă în S. "If this way of stating Gödel's theorem is legitimate, it

[1] Gödel [1]

[2] comp. *Spaţiul abstract al intuiţiei adevărului aritmetic*, p.7

follows that our notion of 'natural number' cannot be fully expressed by means of any formal system" (Dummett [2], 186). Ce semnificaţie filosofică are acest fapt?

O linie de argumentare este cea care susţine teza că rezultatul de mai sus confirmăă (sau cel puţin este compatibil cu) opţiunea realistă în filosofia matematicii, opţiune fundamentată de ideea că *semnificaţia* unei expresii transcende *utilizarea* acesteia şi care implică o concepţie bivalentă asupra adevărului aritmetic. Iată, pe scurt, argumentul invocat.

Atunci când calificăm propoziţia G ca fiind adevărată avem în vedere *un anumit model* al sistemului considerat (deoarece G este adevărată în unele modele şi falsă în altele). Posedăm aşadar o idee perfect definită de structură matematică (o concepţie intuitivă clară) în raport cu care vorbim despre numerele naturale şi deci despre adevărul lui G. Însă această concepţie intuitivă nu este complet explicitabilă (caracterizabilă) printr-o mulţime finită de aserţiuni despre numerele naturale. Deci expresia "număr natural" este un exemplu, din multe altele, care ne arată că semnificaţia unei expresii nu poate fi explicată în termenii *folosirii* expresiei respective.

O altă linie de argumentare suţine teza contrară, respectiv teza că Teorema lui Gödel nu reprezintă un contraargument la identificarea semnificaţiei unei expresii cu folosirea în limbă. Iată argumentul oferit şi consecinţele lui.

Comprehensiunea semnificaţiei unei expresii nu se face mecanic prin explicitarea relaţiei dintre expresie şi ceea ce ea semnifică. Mai curând, dovada asimilării unui concept (i.e. a comprehensiunii unei semnificaţii) se face prin *folosirea* corectă, în varii situaţii, a expresiei respective. În acest fel semnificaţia unei expresii şi folosirea ei se află în raport de *identitate.*

Această teză însă ("meaning is use") este foarte generală şi necesită astfel explicitări ulterioare, respectiv cele privitoare la *modul în care trebuie descrisă* folosirea expresiei (o teorie generală a acestui fapt fiind foarte problematică) şi la criteriile după care putem califica descrierea respectivă ca fiind *corectă* şi *adecvată* (o sarcină foarte dificilă în filosofia matematicii).

Rezultă că Teorema lui Gödel nu poate fi invocată ca argument împotriva tezei "meaning is use" şi că semnificaţia acordată de prima linie acestei teoreme este greşită. Greşeala ar consta într-o aplicare eronată a noţiunii de *model.* Atunci când vorbim despre modele le avem în vedere ca entităţi construite în teorii matematice specificate şi *descrise* prin intermediul acestor teorii (modelele descrise în termeni set-teoretici sau în termenii numerelor naturale). Iar argumentarea primei linii operează cu o noţiune de model ca fiind dată independent de orice descripţie. Aşadar, cum noţiunea de model nu este independentă de *descrierea* prin care este dată rezultă că nici adevărul propoziţiei G, la care accedem în modelul considerat (i.e. unul standard, în care Th. Gödel este adevărată) nu transcende descrierea în cauză. Şi deci semnificaţia nu transcende descrierea folosirii expresiei.

Pe de altă parte, dacă vrem să caracterizăm formal conceptul de număr natural, şi n-o putem face prin intermediul unei caracterizări formale incomplete, nu putem (nici) apela la concepţia despre modelul standard (în care G este adevărată) pentru că argumentarea ar fi circulară: această concepţie trebuie explicitată printr-o descripţie iar descripţia apelează la conceptul de număr natural.

Şi totuşi, pe ce se bazează adevărul propoziţiei G, respectiv faptul că propoziţia G "can be recognized by us to be true"?

După Dummett, "The argument for the truth of U [the Gödel sentence G] proceeds under the hypothesis that the formal system in question is consistent" ([2], 192). "Considered as an argument to a hypothetical conclusion - that *if* the system is consistent, then $\forall x A(x)$ [i.e. $\forall x F(x)$] is true - this reasoning can of course be formalized in the system. Considered as an argument for the unconditional asertion of U, it depends more heavily on the assumption of the consistency of the system than any piece of reasoning that can be formalized in it" (idem). "... to the argument which is supposed to establish that all of statements $A(0), A(1), A(2), \ldots$ are true, and hence that $\forall x A(x)$ is true, the grand assumption of the total consistency of the system is quite essential. Therefore it is in the reasoning which shows that all of $A(0), A(1), A(2), \ldots$ are true, and not in the quite evident step from there to the truth of $\forall x A(x)$, that we have to appeal to something which cannot be formalized in the system: namely to the argument which is intended to show that the system possesses overall consistency ([2], 193). În fine, "The interest of Gödel's theorem lies in its applicability to *any* intuitively correct system for number theory... We have, therefore, to consider the consistency proof with which Gödel's reasoning must be supplemented if the truth of U is to be established as one which we know that we can give for any formal system, provided only that it is assumed about that system that it is intuitively correct" (idem).

Rezultă aşadar că adevărul propoziţiei G poate fi dedus prin *modus ponens* din condiţionalul demonstrabil în S. "Dacă sistemul considerat S este consistent, atunci G este adevărată" şi din asumpţia consistenţei sistemului:

$$\frac{\begin{array}{l} S \vdash \text{ If } S \text{ is consistent}, \quad G \text{ is true} \\ S \text{ is consistent} \end{array}}{G \text{ is true}}$$

Însă, prin *Th.G2*, dacă S este consistent, atunci $S \nvdash Cons_S$. Atunci cum stabilim consistenţa sistemului formal?

O demonstraţie a consistenţei lui S nu poate fi decât una neinformativă,[3] adică o demonstraţie prin inducţie pe lungimea demonstraţiilor formale în raport cu proprietatea de a avea o concluzie adevărată. Definirea acestei proprietăţi se face inductiv, pe baza matricelor operatorilor propoziţionali, a definirii cuantificatorului universal printr-o suită de conjuncţii şi a celui existenţial prin disjuncţii. Se adaugă apoi ipoteza adevărului axiomelor şi a validităţii regulilor de inferenţă.

Desigur, problema cheie aici este cea privitoare la *adevărul axiomelor* şi la *validitatea regulilor de inferenţă* utilizate. Este caracterul aritmetic intuitiv un indicator suficient al adevărului unei axiome? Ce argumente se pot aduce în acest sens? Sau dacă nu cumva

[3]Pentru anumite sisteme formale o demonstraţie informativă (netrivială) se poate da: demonstraţia dată de Gentzen [1] utiliând inducţia transfinită până la ε_0. Şi în acest caz însă ceva intuitiv adevărat despre conceptul de număr natural rămâne în afara sistemului considerat, resp. validitatea inducţiei transfinite până la ε_0. Ceea ce interesează însă este aplicabilitatea *generală* a Th.G1 la orice sistem formal intuitiv corect.

Th.G2 poate fi un argument pentru teza că pentru *orice* sistem al aritmeticii la care Th.G1 se aplică se poate oferi cel mult o demonstraţie de consistenţă neinformativă. Respectiv, pentru cazul particular al demonstraţiei pe baza inducţiei transfinite până la ε_0 ($\varepsilon_0 TI$), dacă nu cumva cadrul conceptual non-aritmetic utilizat este mai puţin cert decât teoria demonstraţiei pentru aritmetica de ordinul întâi. Iată ce crede Gentzen: "Im ganzen meine ich, dass auch der *Endlichkeitsbeweis* (15.4) innerhalb der grundsätzlichen Unterscheidung vom bedenklichen und unbedenklichen Beweismitteln (§9) durchhaus noch dem *Unbedenklichen* zugerechnet werden kann, so dass der Widerspruchfreiheitsbeweis eine wirkliche *Sicherung* der bedenklichen Teile der reinen Zahlentheorie darstellt".[4]

Cu privire la opinia exprimată de Gentzen, C. Wright manifestă rezerve: "To accept the Gentzen proof is to be persuaded of a mapping between the proofs constructible in elementary number theory and the series of ordinals up to ε_0. And to understand the structure of ordinals up to ε_0 is to grasp a concept which embeds and *builds on* an ordinary understanding of the series of natural numbers. So to trust the Gentzen proof is implicitly to forgo any doubt about the coherence of the concept of natural number. Any residual doubt about the consistency of first-order number theory would have, therefore, to concern whether the (fully coherent) concept of number is faithfully reflected by the standard first-order axioms-specifically, by all admissible instances of the induction schema. Such a doubt would have to concern whether, even when we are restricted to first-order arithmetical vocabulary, "tricksy" predicates might not somehow be formulated whose use in inductions could lead to contradiction. Could someone reasonably worry about that who was confident in the consistency of Gentzen's method? How might such a doubt be further elaborated? ([1], 330).

Pe baza acestor rezerve cu privire la demonstrarea consistenţei Wright consideră că ceea ce se poate demonstra efectiv este doar enunţul condiţional din *modus ponens* de mai sus. Aşadar, acest enunţ condiţional, demontrabil în S trebuie să figureze ca *demonstraţie*

[4]G. Gentzen [1], 560. "Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie", *Math. Ann.*, 112, 1936, 493-565.

a lui G.[5]

Să revenim la Dummett. Ce însemnează extensibilitatea indefinită a semnificaţiei conceptelor matematice şi cum se fundamentează ea?

Noi posedăm comprehensiunea completă a conceptului de număr natural. Acest concept reclamă validitatea inducţiei în raport cu orice proprietate bine-definită. Însă, într-un sistem formal validitatea inducţiei se referă doar la proprietăţile exprimabile în sistem. O dată ce sistemul a fost formulat se pot construi definiţii de proprietăţi noi, neexprimabile în el. O astfel de proprietate este cea de "propoziţie adevărată a lui S". Iar prin aplicarea inducţiei la acest tip de proprietăţi se pot deriva concluzii nedemonstrabile în S: "The reason why the ordinary concept of "natural number" is inherently vague is that a central feature of it, which would be involved in any characterization of the concept, is the validity of induction with respect to any well-defined property; and the concept of a well-defined property is turn exhibits a particular variety of inherent vagueness, namely indefinite extensibility. A concept is indefinitely extensible if, for any definite characterization of it, there is a natural extension of this characterization, which yields a more inclusive concept" ([2], 195).

Prin aceasta însă nu se infirmă nicidecum teza "meaning is use", pentru că o astfel de extensiune se face în acord cu anumite principii generale care crează astfel de extensiuni, iar caracterizarea extinsă se formulează de fiecare dată prin raportare la cea anterioară (neextinsă). La Dummett extensibilitatea este un gen de vaguitate, însă vaguitatea unui concept nu implică vaguitatea unei descrieri corecte a folosirii expresiei respective. Dacă o expresie este perfect definită, atunci descrierea folosirii ei se face printr-un singur sistem formal. Iar dacă expresia are o semnificaţie vagă, "it will be essential to the characterization of its use to formulate the general principle according to which any precise formal characterization can always be extended. Such a characterization is as much in terms of *use* as any other" (idem).

Tot astfel stau lucrurile şi cu conceptul demonstrabilităţii. Fiind un concept vag

[5]O alternativă este demonstraţia intuiţionistă a lui G (în cont. p.140). Este ea una validă?

va exista o extensiune a lui care produce un concept mai cuprinzător. Şi astfel, dacă semnificaţiile sunt date în termenii metodelor de demonstraţie de care dispunem, atunci "the very meanings of our mathematical statements are always subject to shift".[6] Această teză dummettiană este în acord cu tezele intuiţionismului matematic despre demonstraţie. O demonstraţie matematică (i.e. construcţie) este în mod esenţial o construcţie mentală care poate fi reprezentată simbolic, dar nu este identică cu această reprezentare. Non-identitatea în cauză recuză existenţa unui izomorfism între totalitatea demonstraţiilor posibile ale propoziţiilor într-o teorie matematică şi totalitatea structurilor simbolice (demonstraţiilor) într-un sistem formal. Iată ce scrie Dummett: "The intuitive conception of a valid mathematical proof, even for statements within some circumscribed theory, cannot in general be identified with the concept of a proof within some one formal system; for it may be the case that no formal system can even succeed in embodying all the principles of proof that we should intuitively accept; and this is precisely what is shown to be the case in regard to number theory by Gödel's theorem." ([2], 200).

Cele două linii argumentative prezentate mai sus au însă şi puncte de contact. Teza "meaning is use", de exemplu, nu aparţine exclusiv opţiunii constructiviste dummettiene. Ea este perfect compatibilă şi cu poziţia realistă. Un astfel de punct de vedere, opus celui reprezentat de Dummett, este exprimat de C. Peacocke [1]. Să vedem cum arată acest gen de argumentare şi în ce sens contrazice el constructivismul lui Dummett.

Dezvoltările teoretice dummettiene sunt o variantă a logismului lui Frege în filosofia matematicii. Însă clauza manifestării şi clauza extensiunii conservative au consecinţe indezirabile pentru logicism, respectiv

1. respingerea teoriei semnificaţiei în termenii condiţiilor de demonstraţie
2. incompatibilitatea cu angajamentul ontologic al aritmeticii.

Să ne oprim la 1, din perspectiva căreia Peacocke respinge constructivismul dummettian.

Teza că semnificaţia unei constante logice este strict determinată printr-o mulţime de reguli de inferenţă este dată, la Dummett ([1], 363-364), prin următoarele două clauze:

[6] M. Dummett. [1], p.401

"First, the condition for the correctness of an assertion made by means of a sentence containing a logical constant must always coincide with the existence of a deduction, by means of those rules of inference, to that sentence from correct premisses none of which contains any of the logical constants in question. Secondly, there must not be any deduction from premisses of the same kind, via sentences involving the logical constants, to a conclusion also containing no logical constant whose assertion would not itself be correct. This second requirement is, in effect, the requirement that the addition of the logical constants to that fragment of the language which lacks them is a conservative extension of the fragment (with respect to a property of being correctly assertible).[7]

Aşadar, cele două clauze dummettiene conţin (şi implică) următoarele teze.

a) Semnificaţia unui operator logic este dată complet prin regulile lui de introducere şi cele de eliminare. Comprehensiunea acestor reguli înseamnă comprehensiunea operatorului respectiv, considerat *separat*, şi deci şi comprehensiunea contribuţiei operatorului la constituirea semnificaţiei enunţului complex în care apare şi la validitatea argumentelor care conţin un astfel de enunţ.[8] (cerinţa *separabilităţii*).

b) semnificaţia este dată în termenii condiţiilor demonstrabilităţii

c) *teza extensiunii conservative*: introducerea unor noi constante logice nu trebuie să altereze semnificaţiile enunţurilor deja existente în limbaj.

d) *teza manifestabilităţii*: sesizarea unei semnificaţii trebuie să fie complet manifestă prin *utilizarea* ei *efectivă* de către vorbitor: "The meaning of a mathematical statement determines and is exhaustively determined by its *use*. The meaning of such a statement cannot be, or contain as an ingredient, anything which is not manifest in the use made of it..." "An individual cannot communicate what he cannot be observed to communicate" ([3], 98).

e) teza proprietăţii *subformulei*: dacă inferenţa de la Γ la P este deductiv validă, atunci

[7]comp. şi M. Dummett, [5], 220

[8]comp. Dummett, [5], 251. I. Hacking [1] avansează un punct de vedere similar în raport cu logica clasică

există o demonstraţie a lui P din Γ în care orice linie este fie un subenunţ al lui P, fie un subenunţ al lui Γ. Şi deci, dacă P este un adevăr logic atunci există o demonstraţie a lui P în care fiecare linie este o subformulă a lui P.

Respectiv, dacă Γ este o mulţime de enunţuri, P un enunţ oarecare iar inferenţa de la Γ la P este deductiv validă, atunci există o demonstraţie a lui P din Γ care apelează doar la regulile de introducere şi eliminare ale termenilor logici care apar în P şi în Γ.[9] Această cerinţă este o versiune a tezei după care un enunţ analitic este adevărat doar pe baza semnificaţiei termenilor săi.

Obiecţia lui Dummett la adresa realismului rezidă în faptul că realismul respinge teza conservativităţii. În replică, Peacocke oferă un analogon al celei de-a doua clauze dummettiene, perfect compatibil cu poziţia realistă, şi care se bazează pe distincţia semantic-deductiv cu privire la relaţia de consecinţă.

Σ este deductiv conservativă pe L ddacă pentru orice enunţuri $A_1, \ldots, A_n, B$ ale lui L, $A_1, \ldots, A_n \vdash_{L+\Sigma} B$ numai dacă $A_1, \ldots, A_n \vdash_L B$.

Σ este semantic conservativă pe L ddacă pentru orice enunţuri $A_1, \ldots, A_n, B$ ale lui L, $A_1, \ldots, A_n \vdash_{L+\Sigma} B$ numai dacă $A_1, \ldots, A_n \models B$,

unde Σ este o mulţime de reguli pentru noua constantă logică iar L este un sistem al deducţiei pentru limbajul care nu conţine noua constantă.

Realismul acceptă doar clauza extensiunii conservative *semantice* în raport cu modelele standard ale aritmeticii. Fundamentarea opţiunii pentru modelele standard rezidă în comprehensiunea cuantificării universale clasice peste numerele naturale pe baza a ceea ce Peacocke numeşte "commitment account" şi care înseamnă următoarele două clauze: "It claims (a) that what makes it the case that someone is judging a content of the form "All natural numbers are F" is that he thereby incurs this infinite family of commitments: to $F(0)$, to $F(1)$, to $F(2), \ldots$. The commitment account also claims (b) that a content of the form "All natural numbers have property F" is true just in case all its commitments are fulfilled. The commitment account makes it relatively unproblematic that a first-order

[9] comp. [5], p.220

universal quantification should, though true, be unprovable from a particular recursive set of axioms. On the commitment account, what gives the universal quantification its truth-condition is not the set of ways: it can be proved, but the commitments incurred in judging it" ([1], 174-5).[10]

Un exemplu simplu ilustrează justificarea semanticii clasice: o formulă de genul $(P \supset Q) \vee (Q \supset P)$ nu este derivabilă în sistemul deducţiei naturale folosind doar regulile pentru $\supset$ şi $\vee$, însă este derivabilă dacă adăugăm regulile pentru negaţie. Avem aşadar un exemplu de extensiune deductiv-neconservativă dar semantic conservativă. Şi deci o asemenea deducţie ar fi justificată dacă regulile clasice ale negaţiei sunt justificate. Pe de altă parte, relaţia de mai sus, $(P \supset Q) \vee (Q \supset P)$, nu este una constructivist justificabilă, deoarece nu întotdeauna poate exista o metodă efectivă de a demonstra unul dintre disjuncţi. Este negaţia clasică semantic justificată?

C. Peacocke oferă o asemenea justificare prin introducerea operatorului negaţie în raport cu operatorul incompatibilitate,[11] negaţia clasică fiind cel mai slab operator monadic O pentru care incompatibilitatea P/OP este validă. "Then the claim that an operator O used by the thinker should indeed be given as its semantic value the weakest operation which validates the rule P/OP is certified by the fact that there is no proposition stronger than P which he treats as primitively incompatible with OP." ([1], p.176-7) Iar dacă O este un asemenea operator rezultă că regulile clasice de introducere şi eliminare sunt valide pentru el, fapt perfect demonstrabil. Avem aici, aşadar, o ilustrare a modului în care se poate construi un analogon din perspectiva semanticii realiste (şi fundamentat de semantica realistă) al celei de-a doua clauze a lui Dummett. Şi astfel un contraargument

[10] În felul acesta se evită introducerea cuantificării de ordinul doi, iar enunţul lui Gödel, iniţial nederivabil, devine o consecinţă semantică a axiomelor aritmeticii de ordinul întâi. Mai mult, în felul acesta se evită consecinţele Th. de completitudine (i.e. un enunţ E este derivabil într-o axiomatizare recursivă a aritmeticii de ordinul întâi S ddacă el este o consecinţă a lui S), a cărei validitate include modele nonstandard, în unele din care enunţul lui Gödel este fals.

[11] sub supoziţia cu totul plauzibilă că orice limbaj posedă un instrument al negaţiei, fie el acesta aici, incompatibilitatea.

la obiecţia lui Dummett.

Al doilea obiectiv al criticii lui Peacocke îl reprezintă critica conservatismului deductiv şi deci respingerea teoriei semnificaţiei în termenii condiţiilor de demonstraţie. Argumentul se sprijină pe teorema lui Gödel, care ar furniza o demonstraţie intuitivă a adevărului propoziţiei G (a lui Gödel) şi care n-ar fi accesibilă unei semantici constructiviste. Să prezentăm, pe scurt acest argument.

Diferenţa dintre un constructivist şi un anti-constructivist (realist) rezidă în "the issue of whether a content is to be individuated by specific means of establishing it, or rather is to be individuated by what has to be she case for it to be true, without any mention in that individuation of means of establishing the content in question" ([1], 178). De unde întrebarea: sub ce concepţie a semnificaţiei enunţul lui Gödel, $\forall n \sim Pf(n, \boldsymbol{g})$, este adevărat? Iată răspunsul lui Peacocke:

"... if for any n the sentence $\sim Pf(\boldsymbol{n},\boldsymbol{g})$ is provable, then for any n the sentence $\sim Pf(\boldsymbol{n},\boldsymbol{g})$ is true. So all the commitment of the sentence $\forall n \sim Pf(n, \boldsymbol{g})$ are fulfilled. But according to the second part of the commitment account (...), a universal numerical quantification is true if and only if all its commitments are fulfilled. So on the commitment account, $\forall n \sim Pf(n, \boldsymbol{g})$ is a true sentence" ([1], 178).

Iar această argumentare, crede Peacocke, nu este compatibilă cu constructivismul. Să vedem dacă astfel stau lucrurile.

Într-adevăr, dacă comprehensiunea unui conţinut aritmetic cuantificat universal are loc prin sesizarea acelor "effectively decidable commitments", atunci o asemenea comprehensiune nu depinde de sesizarea condiţiilor de demonstraţie ale enunţului. Iar în acest caz incompatibilitatea este evidentă.

Dar să vedem pe ce se bazează argumentul lui Peacocke. Înainte de toate, pentru ca o demonstraţie a adevărului enunţului G să fie validă intuiţionist trebuie să dispunem de o specificare *constructivistă* a semnificaţiei cuantificatorului universal. Intuiţionist, o demonstraţie a unui enunţ cuantificat universal, $\forall nF(n)$, este o metodă constructivă care, aplicată la orice număr natural n, produce o demonstraţie a lui $F(\boldsymbol{n})$. Dar ce este o demonstraţie constructivă a enunţului cuantificat universal? Peacocke consideră că o astfel de explicitare *predicativă* (una în care clauzele semantice ale intuiţionismului să nu conţină ele însele în mod ineliminabil însăşi noţiunea de demonstraţie constructivă) nu există.

O replică la această din urmă teză este dată de C. Wright [1], pentru care o asemenea noţiune a demonstraţiei constructive se poate da şi o demonstraţie a propoziţiei gödeliene, strict constructivistă, poate fi elaborată.[12] O astfel de demonstraţie s-ar baza pe sensul intuiţionist al negaţiei (resp. pe faptul că demonstrarea lui $\sim A$ este o construcţie care demonstrează că o contradicţie poate fi demonstrată dacă avem o demonstraţie a lui A) şi pe faptul că argumentarea lui Gödel oferă posibilitatea găsirii unei contradicţii, dacă ar exista un contraexemplu la G. Demonstraţia presupune doar ca metodele şi asumpţiile sistemului S să fie *intuiţionist acceptabile* iar S să fie *calculatoriu adecvat* (adică orice predicat primitiv recursiv să fie decidabil în sistem, pentru valori arbitrare ale variabilelor sale). Iată, pe scurt, această demonstraţie.

Fie $P(x, y)$ predicatul demonstrabilităţii în S, echivalent cu următoarea descripţie: y este numărul Gödel al unei formule a lui S iar x este numărul Gödel al unei demonstraţii a formulei respective. Şi fie G propoziţia indecidabilă a lui Gödel: $(\forall x) \sim (Px, Sub\langle g, m, g\rangle)$, unde "$Sub\langle g, m, g\rangle$" este însuşi numărul Gödel al formulei care-l exprimă pe G. Atunci

a) "Pkg" este demonstrabil în S, pentru că este calculatoriu verificabil.

b) G este demonstrabil în S (pe baza a) şi a construcţiei predicatului Pxy), şi deci

c) "$\sim Pkg$" este dem. în S. Aşadar,

d) "$Pkg \& \sim Pkg$" este dem. în S.

De unde, pe baza sensului intuiţionist al negaţiei conchidem asupra demonstrabilităţii (în sens intuiţionist) a lui "$\sim Pkg$". Şi cum *orice* "$\sim Pkg$" este demonstrabil putem, mai departe conchide, asupra demonstrabilităţii închiderii lui universale.

Este această demonstraţie logic ireproşabilă? Ea scapă fireşte unei eventuale obiecţii privitoare la specificarea *constructivistă* a semnificaţiei "$\forall$" prin *identificarea demonstraţiei constructive cu calculabilitatea* fiecărui $A(x)$. Întrebarea este una privitoare la *teza* care

[12] comp. [1], 11. VI.

justifică trecerea de la exemplificări la enunţul cuantificat universal. Aici Peacocke consideră că demonstraţia lui Wright "can be ratified as sound only by an anti-constructivist account of content. The anti-constructivist will say that we find it acceptable because it employs means which we can see to be sound for the kind of meaning which is possessed by the numerical quantifier over the natural numbers. But what this kind is, the anti-constructivist will say, is given precisely by the commitment account" ([1], 180-1).[13]

În acord cu Dummett,[14] Wright consideră că această trecere este neproblematică, din moment ce pentru un k arbitrar "Ak" este (intuiţionist) demonstrabil. Numai că această tranziţie nu reclamă acel "commitment account" al lui Peacocke. Obţinem aşadar următoarea disjuncţie: ori clauzele din "commitment" nu sunt constructivist acceptabile (Peacocke) ori validitatea demonstraţiei enunţului cuantificat universal nu se fundamentează pe acest "commitment". Wright consideră ca adevărată această din urmă alternativă, deoarece argumentul lui Peacocke nu se bazează propriu-zis pe "commitment account" ci, mai degrabă, "it depends only on the second ingredient claim-claim (b) in the passage quoted. True, that claim refers to "$F0$", "$F1$", "$F2$", etc., as "commitments" of contents of the form, "All natural numbers have property F". But that is inessential: as far as its role in the reasoning is concerned, claim (b) comes to no more than - has no implications which are not shared by - the straightforward clause: "All natural numbers have property F" is true if and only if for each number n, "Fn" is true".[15] Iar această clauză, consideră Wright n-are consecinţe anti-constructiviste.

Pe de altă parte, demonstraţia lui Wright nu este degrevată de asumpţia consistenţei.

[13]Peacocke se referă la demonstraţia lui Wright din Peacocke [1], 179, însă cele spuse privesc deopotrivă cea de-a doua demonstraţie (din Wright [1], VI), în care asumpţia consistenţei lui S este, vom vedea, de asemenea prezentă.

[14]"In fact, the transition from saying that all of the statements $A(0), A(1), A(2), \ldots$ are true to saying that $\forall a A(x)$ is true is trivial. The principle of reasoning, not embodied in the system, which we employ in arriving at the truth of $\forall x A(x)$, is not this transition, but rather that which leads us to assert that all of the statements $A(0), A(1), A(2), \ldots$ are true" ([2], 192).

[15]Wright [1], p.348

Aşa cum remarcă autorul însuşi, pentru ca o demonstraţie constructivă (identificată cu calculabilitatea) să poată fi validă trebuie ca metodele şi principiile conţinute în conceptul intuiţionist al demonstraţiei să fie consistente. În caz contrar, verificabilitatea constructivă a fiecărui "$\sim Pkg$" nu este garantată iar trecerea la enunţul cuantificat universal nu este justificată.

În consecinţă, orice întemeire a aserţiunii adevărului enunţului nedemonstrabil G face apel, într-un fel sau altul, la conceptul consistenţei. Rezultă, atunci, că ceea ce avem efectiv demonstrat este doar condiţionalul

$$\vdash_S Cons_S \supset G$$

şi *nu* o demonstraţie a lui G.

Putem, fireşte, proceda şi invers. Respectiv, să acceptăm că diferitele încercări analizate mai sus reprezintă, fiecare, o demonstraţie a lui G. În acest caz însă trebuie să acceptăm teza că posedăm un concept al demonstrabilităţii în aritmetica intuitivă care nu poate fi specificat de o mulţime de proceduri algoritmice.

Să vedem acum în ce fel Th.1 a lui Gödel fundamentează o inconsecvenţă esenţială a programului dummettian: cea dintre *logicismul* său şi teza angajamentului ontologic al matematicii.

Conform programului logicist conceptele de bază ale aritmeticii ("număr natural", "zero", "succesor", "adunare", "înmulţire", etc.) sunt termeni logici sau sunt definibile utilizând exclusiv termeni logici. Orice enunţ adevărat compus din astfel de termeni (eventual şi din alţi termeni logici) este un adevăr logic. Adevărurile logice constituie o submulţime a adevărurilor aritmetice. Toate adevărurile logice sunt adevăruri analitice.

Pe de altă parte însă, aritmetica are ca presupoziţie ontologică existenţa numerelor naturale. Cum numărul natural este un concept logic rezultă că existenţa numerelor naturale este un adevăr logic. N. Tennant ([1], 299-302) asertează explicit: numerele naturale "are necessary because they must be in any world that admits of conceptualization and of thought about it... That is to say, they must be in any world.

Commitment to numbers is immanent in any conceptual scheme allowing for the discrimination of particulars."

Acceptarea acestei teze implică însă respingerea unei idei foarte acceptate: că angajamentul existenţial implică sinteticitatea.

Logicismul şi asumpţia existenţei nu pot însă coexista în contextul teoretic al tezelor a)-e) de mai sus, teze care fundamentează doctrina dummettiană. Un argument în acest sens este uşor de construit. Dacă 0 (zero), s (succesor) şi N (număr natural) sunt concepte logice atunci semnificaţia lor este complet explicitabilă fie prin reguli de introducere şi eliminare, fie pe baza altor termeni a căror semnificaţie este sesizabilă prin regulile aferente de introducere şi eliminare. $0 \neq S0$ ar fi astfel un adevăr aritmetic construit cu ajutorul acestor reguli plus negaţia şi identitatea. Conţinând doar termeni logici avem totodată un exemplu de adevăr logic/analitic. Pe baza regulii introducerii cuantificatorului existenţial din $0 \neq S0$ obţinem enunţul $\alpha)\exists x \exists y(x \neq y)$, consecinţă logică a celui dintâi. Cum $\alpha)$ conţine evident doar termeni logici, pe baza proprietăţii subformulei şi a extensiunii conservative rezultă că există o demonstraţie a lui α doar pe baza regulilor de introducere şi eliminare pentru $\exists, \neg$ şi $=$, în care fiecare linie este o subformulă a lui α. Însă o asemenea demonstraţie nu poate fi construită. Iar inexistenţa unei astfel de demonstraţii arată că termenii aritmetici (logici) N, 0 şi s nu pot fi definiţi utilizând $\exists, \neg$ şi $=$. În fine, cum α nu poate fi definit utilizând doar regulile de introd./elim. rezultă că α nu este un adevăr logic. Şi respectiv, cum $\exists, \neg$ şi $=$ sunt termeni logici iar adevărurile logice sunt închise în raport cu relaţia de consecinţă, rezultă că nici un adevăr logic nu implică α.

Să vedem acum în ce sens Th.G1 poate constitui un contraargument la programul logicist al lui Dummett. Ce semnificaţie are Th.G1?

O interpretare larg răspândită utilizează această teoremă pentru argumentarea tezei *adevărul transcende demonstrabilitatea*, în următorul fel: Fie I o formalizare intuiţionistă consistentă a aritmeticii, iar G un enunţ Gödel pentru această formalizare. Th.G1 arată indemonstrabilitatea lui G. Însă G este adevărată pentru că spune despre sine că este indemonstrabilă. Deci adevărul transcende demonstrabilitatea.

Trebuie să remarcăm că o asemenea interpretare ar fi adecvată numai cu asumpţia extrem de problematică a existenţei unui concept al demonstrabilităţii exhaustivabil formal. Altminteri lucrurile trebuie considerate dintr-o altă perspectivă. Un intuiţionist, desigur, va considera adevărat enunţul G, ceea ce înseamnă că G este demonstrabil, însă nu în sensul demonstrabilităţii lui în I, căci nici o demonstraţie a lui G nu poate fi redetă într-un sistem formal. De aici un intuiţionist va conchide nemijlocit: Th.G1 este un argument pentru teza că demonstraţia intuiţionistă este *neformalizabilă* şi, implicit, că adevărul unui enunţ nu poate fi identificat cu demonstrabilitatea într-un sistem formal.

În ce fel această teză intuiţionistă contravine programului dummettian?

În virtuta tezelor a) şi d) ale programului dummettian comprehensiunea semnificaţiei unui termen are loc pe baza regulilor de introducere şi eliminare şi trebuie să fie complet manifestă. Însă dacă regulile care constituie semnificaţia unui termen nu sunt formalizabile, atunci extensiunea termenului nu este recursiv enumerabilă. Cum pot fi aceste reguli sesizate? Mai mult, cum pot deveni ele manifeste?

Să considerăm acum că în sens strict analiticitatea unui enunţ E, alcătuit doar din termeni logici, rezidă în demonstrabilitatea lui într-un sistem al deducţiei naturale S şi că în acest sens adevărul lui E poate fi determinat doar pe baza semnificaţiilor termenilor din E. În acest caz mulţimea adevărurilor aritmetice şi analitice în sens strict este recursiv enumerabilă. Cum G este un adevăr nedemonstrabil în S conchidem că mulţimea adevărurilor aritmetice nu este recursiv enumerabilă. Deci G nu este un adevăr analitic în sens strict. Atunci, în ce sens este G *demonstrabil*?

Shapiro [1] propune o astfel de demonstraţie pe baza conceptului de *adevăr aritmetic*. Cum G nu este strict analitic, G poate fi analitic în sens slab (respectiv este o *consecinţă logică* a unei mulţimi de enunţuri strict analitice) sau poate fi un enunţ sintetic.

Schematic, demonstraţia lui G ca enunţ analitic în sens slab, consideră un sistem deductiv S căruia i se adaugă un predicat T, al adevărului aritmetic, şi un sistem S_1, o extensiune conservativă a lui S care conţine cele două reguli logice de introducere/eliminare a lui T [Din P infer $T\ \ulcorner p \urcorner$, unde $\ulcorner p \urcorner$ este numărul Gödel al lui P, şi conversa acestei relaţii]. Ambele sisteme conţin principiul inducţiei.

Ind. $P(0)\&\forall x[(N(x)\&P(x)) \rightarrow P(sx)] \rightarrow \forall(N(x) \rightarrow P(x))$

unde P nu poate fi predicatul aritmetic T. Cum G nu este o teoremă a lui S, iar S_1 este o extensiune conservativă a lui S, rezultă că G nu este nici o teoremă a lui S_1. Deci pentru demonstrarea lui G este necesar un sistem mai tare decât S_1. Fie S_2 o extensiune (neconservativă!) a lui S_1. în care *Ind.* se aplică şi predicatului aritmetic T. În acest fel S_2 demonstrează că orice teoremă a lui S este adevărată. Fiindcă G este un enunţ Gödel pentru S şi o teoremă a sistemului S_2 rezultă că G este un enunţ analitic în sens slab.

Tennant propune o demonstraţie similară şi admite ca alternativă interpretativă caracterul sintetic al lui G (pe fondul caracterului non-logic al predicatului T): "We can formalize this reasoning by extending the vocabulary of the original theory so as to include a primitive truth-predicate. This yields an extended system, for it allows one to form new instances of mathematical induction. So the reasoning for the truth of the formely unprovable Gödel sentence can now go through in the extended system. But this means that the proof of the Gödel sentence thereby obtained... has to contain occurences of items of non-logical vocabulary (namely, the truth-predicate in question) that are not involved in the sentence itself." ([1], 293-4)

Demonstrarea enunţului G cu ajutorului lui *Ind.* scoate în evidenţă şi un alt fapt. Dummett consideră că "It is part of the concept of natural number, as we now understand it, that induction with respect to any well-defined property is a ground for asserting all natural numbers to have that property". ([6], 337) Aşadar, comprehensiunea numerelor naturale înseamnă aplicarea inducţiei în raport cu orice proprietate bine-definită, şi nu doar în raport cu proprietăţile definite în aritmetica de ordinul întâi. În virtutea tezei manifestabilităţii explicitatea acestei comprehensiuni înseamnă tocmai asertarea unui ***principiu al inducţiei de ordinul doi.***

Ind2. $\forall X[(X(0)\&\forall x[(N(x)\&N(x)) \rightarrow X(sx)] \rightarrow \forall x(N(x) \rightarrow X(x))]$

Însă aplicarea unor concepte de ordin superior (i.e. operarea cu o logică de ordinul doi care conţine şi un predicat al adevărului aritmetic) pune sub semnul întrebării cerinţa dummettiană a conservativităţii. Probabil acest fapt a fost avut în vedere de Prawitz în următorul pasaj: "Dummett... sugest... that the requirement of harmony... can be made more precise by saying that it is equivalent to requiring that the addition of the expression to a language should not license a use of the old vocabulary which was not aleady licensed in the original language. This can hardly be correct, however, because from Gödel's incompleteness theorem we know that the addition to arithmetic of higher order concepts may lead to an enrichid system that is not a conservative extension of the original one in spite of the fact that some of these concepts are governed by rules, that must be said to satisfy the requirement of harmony". ([2], 374)

După Prawitz, o altă sursă a deconstrucţiei conservativităţii o reprezintă însuşi caracterul informal al conceptului demonstrabilităţii:

"although the general form of the condition for something to be a canonical proof of a sentence $A \rightarrow B$ is formally stated... there is no formal system generating all the procedures that transform canonical proofs of A to canonical proofs of B, and it is left open what more complicated sentences can be involved in such procedures. For instance, such a procedure may be definable in an extension of a certain language without being definable in the language itself, and hence... the extension of a language obtained by introducing new logical constants may not be a conservative extension of the original language". ([1], 29)

REFERENCES

1. Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds.) [1] *Philosophy of mathematics*, Cambridge UP, Sec. ed. 1983.

2. Dummett, M. [1] *Elements of Intuitionism*, Oxford 1977.

   [2] The philosophical significance of Gödel's theorem, in [4], pp.186-201.

   [3] The philosophical basis of intuitionistic logic, in [4], pp.215-247; Benacerraf & Putnam [1], pp.97-130.

[4] *Truth and Other Enigmas*, London, Duckworth, 1978.

[5] *The Logical basis of metaphysics*, Cambridge 1991.

[6] Reply to Wright, in B. Mc Guinness and G. Olivieri [1].

3. Gentzen, G., [1] Widerspruchefreiheit der Zahlentheorie, *Math. Annalen* 112/1936, 493-565.

4. Gödel, K., [1] Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme. *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38/1931, 173-98.

5. Hacking, J., [1] What is Logic? in R.I.G. Hughes [1], pp.225-258.

6. Hughes, R.I.G. (ed.), [1] *A Philosophical Companion to First-Order Logic*, Hackett Publ. Co., Inc. 1993.

7. Mc Guinness, Olivieri, G., [1] *The Philosophy of M. Dummett*, Dordrecht 1994.

8. Peacocke, C., [1] Proof and Truth, in Wright and Haldane (eds.) [1], pp.165-190.

9. Prawitz, D., [1] Meaning and Proofs, *Theoria*, 43/1977.

   [2] Review of Dummett *The Logical Basis of Metaphysics, Mind* 103/1994.

10. Shapiro, S., [1] *Foundations Without Foundationalism*, Oxford 1991.

11. Tennant, N., [1] *The Taming of the True*, Oxford UP, 1997.

12. Wright, C., [1] *Realism, Meaning and Truth*, Sec. ed. Blackwell 1993.

13. Wright, C. and Haldane, J. (eds.), [1] *Reality, Representation, and Projection*, Oxford UP 1993.

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

SPAŢIUL ABSTRACT AL INTUIŢIEI ADEVĂRULUI ARITMETIC

VIRGIL DRĂGHICI

Abstract

This paper explores the *abstract* dimensions of the *intuitive* comprehension of the concept of arithmetical truth. The investigation has as a frame the context of self-reference and the phenomenon of incompleteness.

1 Preliminar

Scopul lucrării de faţă îl reprezintă *explicitarea spaţialităţii abstracte* care configurează comprehensibilitatea intuitivă a conceptului *adevărului aritmetic.* Fireşte, întreaga analiză intreprinsă vizează *un* concept adevărului aritmetic şi dintr-*o* anumită perspectivă.

Prin *aritmetică* (teoria numerelor) înţelegem o ramură a matematicii care studiază numerele naturale şi alte sisteme enumerabile, categoric definite, de obiecte (e.g. întregi, numere raţionale).[1] Şirul numerelor naturale este o secvenţă de forma:

$$0, 1, 2, 3, \ldots,$$

în care punctele sugerează continuarea secvenţei. Şirul numerelor naturale este secvenţa de obiecte care poate fi generată pornind de la un obiect iniţial 0 (zero) şi trecând succesiv de

[1]Conceptul *aritmetic* nu este unul univoc. În sens restrâns vizează operaţiile "+" şi "·" pe numerele naturale. În sens larg conţine şi alte concepte; în unele cazuri cele două operaţii se aplică la sisteme numerice nonenumerabile (e.g. aritmetica cardinalilor transfiniţi). În cele ce urmează ne interesează nu aceste diferenţe, ci un concept al adevărului aritmetic, pe care-l explicităm riguros. Conceptul opus aritmeticii este cel al *analizei*: în timp ce sistemele studiate de aritmetică au cardinalul cel mult $\aleph_0$, cele studiate de analiză sunt sisteme de numere reale şi au cardinalul $2^{\aleph_0}$ (sau unul superior).

la un obiect generat deja, n, la un alt obiect $n+1$, respectiv n' (succesorul lui n). Această descriere a şirului numerelor naturale poate fi subsumată următoarelor cinci clauze.

1. 0 este un număr natural.
2. Dacă n este un număr natural, atunci n' este un număr natural.
3. Singurele numere naturale sunt cele date prin 1 şi 2.
4. Pentru orice numere naturale m şi n, $m' = n'$ numai dacă $m = n$.
5. Pentru orice număr natural n, $n' \neq 0$.

Primele trei clauze constituie *definiţia inductivă* a numărului natural. Aceste cinci clauze sunt cunoscutele axiome ale lui Peano, care caracterizează şirul numerelor naturale.[2] În cele ce urmează vom avea în vedere *comprehensiunea* şirului numerelor naturale ca obiecte generate prin definiţia inductivă de mai sus şi nu ceea ce un număr natural este în el însuşi.

Prin *propoziţie aritmetică* vom înţelege orice propoziţie exprimată în limbajul aritmeticii de ordinul întâi.[3] Mai precis: "A relation (class) is said to be *arithmetic* if it can be defined in terms of the notions $+$ and $\cdot$ (addition and multiplication for natural numbers) [notă omisă] and the logical constants $\vee, -, (x)$, and $=$, where (x) and $=$ apply to natural numbers only. [notă omisă] The notion "arithmetic proposition" is defined accordingly".[4]

Prin spaţiul *intuitiv* al comprehensiunii adevărului aritmetic vom înţelege spaţiul semnificaţiilor determinat de axiomele aritmeticii Peano (PA), un spaţiu articulat în "experienţa" aritmetică curentă şi structurat deductiv (în sensul Gödel) prin logica predicatelor de ordinul întâi (CP1). Într-o asemenea comprehensiune, la Dedekind [1], de exemplu, şirul numerelor naturale este cea mai mică structură închisă sub o operaţie unu-la-unu a succesiunii, şi care conţine un element care nu este succesorul vreunui element.

[2]Cu singura deosebire că în locul clauzei 3 Peano pune principiul inducţiei matematice, şi-l pune în locul clauzei 5, 4 şi 5 de mai sus ocupând astfel locurile 3 şi 4 în lista sa (cf. Peano [1] şi [2]).

[3]formulare eliptică, pentru că nu există *un* singur limbaj de acest fel. Pentru sensul lui "aritmetic", comp. R. Smullyan [1] §3 şi S.C. Kleene [1], §48. Sensul lui "aritmetic" aici este cel din Gödel [1].

[4]în J.v. Heijenoort [1], 610.

Cum se constituie o asemenea înţelegere a numerelor naturale? Cum a ajuns Dedekind să-şi elaboreze studiul? "Certainly not is one day; rather, it is a synthesis constructed after protracted labor, based upon a prior analysis of the sequence of natural numbers just as it presents itself, *in experience* (subl.V.D.), so to speak, for our consideration. What are the mutually independent fundamental properties of the sequence N, that is, those properties that are not derivable from one another but from which all others follow? And how should we divest these properties of their specifically arithmetic character so that they are subsumed under more general notions and under activities of the **understanding** *without* which no thinking is possible at all but *with* which a foundations is provided for the reliability and completeness of proofs and for the construction of consistent notions and definitions?" ([1], 99-100). (Şi urmează descrierea acestor proprietăţi).

Este această spaţialitate a intuiţiei, determinată de înţelegerea uzuală a numerelor naturale şi de CP1, *intuitivă în totalitatea* orizontului ei conceptual?

Un răspuns afirmativ îl găsim la Hilbert, unde orice raţionament finitist este unul aritmetic: "Und als Hilfsmittel dazu steht uns dieselbe konkret inhaltliche Betrachtungsweise und finite Einstellung des Denkens zu Gebote, wie sie beim Aufbau der Zahlentheorie selbst zur Ableitung der Zahlengleichungen angewandt wurde. Diese wissenschaftliche Forderung ist in der Tat erfüllbar, d.h. es ist möglich, auf rein *anschauliche und finite Weise* (subl. V.D.) - gerade wie die Wahrheiten der Zhalentheorie - auch diejenigen Einsichten zu gewinnen, die die Zuverlässigkeit des mathematischen Apparates gewährleisten" ([1], 171).

Este finitismul hilbertian o concepţie metamatematică realizabilă?

Într-o analiză succintă făcută punctului de vedere finitist Gödel [2] deosebeşte (aşa cum o făcuse Bernays ceva mai înainte) în partea reală (i.e. conţinutistă, *inhaltlich*) a matematicii o dimensiune finitistă şi una constructivistă. Cea din urmă este una non-finitistă (în sens hilbertian); este o parte abstractă (sau de ordinul doi): "Paul Bernays hat wiederholt darauf hingewiesen[5], dass angesichts der Tatsache der Unbeweisbarkeit der

[5] omitem nota

Widerspunchsfreiheit eines Systems mit geringeren Beweismitteln als denen des Systems selbst eine Überschreitung des Rahmens der im Hilbertschen Sinn finiten Mathematik nötig ist, um die Widerspruchsfreiheit der klassichen Mathematik, ja sogar um die der Jlassichen Zahlentheorie zu beweisen. Da die finite Mathematik als die der *anschaulichen* Evidenz definiert ist,[6] so bedeutet das...,[7] dass man für den Widerspruchsfreiheitsbeweis der Zahlentheorie gewisse *abstrakte* Begiffe braucht. Dabei sind unter abstracten (oder nichtanschaulichen) Begriffen solche zu verstehen, die wesentlich von zweiter order höherer Stufe sind, das heisst, die nicht Eigenschaften, oder Relationen *konkreter Objeckte* (z.B. von Zeichenkombinationen) beinhalten, sondern sich auf *Denkgebilde* (z.B. Beweise, sinnvolle Aussagen usw.) beziehen, wobei in den Beweisen Einsichten über die Letzeren gebreucht werden, die sich nicht aus den kombinatorischen (raumzeitlichen) Eigenschaften der sich darstellenden Zeichenkombinationen, sondern nur aus deren *Sinn* ergeben" ([2], 280).

Ceea ce avem în aces caz este modul în care ceva "zweiter Stufe" (respectiv dimensiunea constructiv abstractă) participă la comprehensiunea adevărului aritmetic.

În cele ce urmează ne vom opri la explicitarea unei asemenea dimensiuni abstracte. O vom face însă (dată fiind complexitatea extremă a temei) dintr-o anumită perspectivă, respectiv cea fundată pe analiza autoreferinţei.

2 Propoziţiile autoreferenţiale şi construcţia expresiilor indecidabile

Cel mai cunoscut exemplu de autoreferinţă îl reprezintă, probabil, celebrul paradox al mincinosului. Epimenide din Creta face afirmaţia: "Toţi cretanii sunt mincinoşi". Spune Epimenide adevărul sau minte? E uşor de văzut, adevărul acestei propoziţii implică

[6]Gödel se referă aici la studiul lui Hilbert "Über das Unendliche", 171-173.

[7]în paranteza omisă aici Gödel se referă la studiul lui Bernays din *L'enseignement mathématique* 34/1935, "Sur le platonisme dans les mathematiques"; o trad. în l. engl. în P. Benacerraf şi H. Putram (eds.) [1], 258-271.

negaţia sa, aşa cum negarea ei implică adevărul propoziţiei. Expresia simbolică a spusei lui Epimenide se obţine la fel de uşor. Să presupunem că A este un predicat, astfel că pentru orice propoziţie p, $A(p)$ înseamnă că p este adevărată, şi că este validă următoarea echivalenţă:

$$(\alpha) \qquad A(p) \equiv p$$

Dacă ne referim acum la propoziţia lui Epimenide, atunci $p \equiv \neg A(p)$, de unde, prin contrapoziţie, obţinem $\neg p \equiv A(p)$. Apoi, pe baza echivalenţei (α), obţinem $p \equiv \neg p$; contradicţie.

Dacă în acest paradox înlocuim pe A (adevărat) cu D (demonstrabil), atunci $D(p)$ va însemna că p este demonstrabilă. Presupunem acum că "p este demonstrabilă" este adevărată dacă şi numai dacă (ddacă) p este adevărată, deci

$$(\beta) \qquad D(p) \equiv p$$

Să construim acum o propoziţie g a cărei semnificaţie este "Această propoziţie nu este demonstrabilă" (avem aşadar o propoziţie care afirmă propria-i indemonstrabilitate). Simbolic exprimat, obţinem echivalenţa $g \equiv \neg D(g)$. Cum conceptul demonstrabilităţii se raportează de fiecare dată la un sistem formal, în care ceva este / nu este demonstrabil, presupunem în continuare că sistemul considerat S nu demonstrează propoziţii false. În exemplul nostru, dacă g ar fi demonstrabilă, atunci ar fi falsă, deci nedemonstrabilă. Aşadar, este nedemonstrabilă (căci dacă $g \supset \neg g$, atunci $\neg g$) şi adevărată (pentru că g tocmai aceasta spune). Apoi, negaţia lui g, care spune că g este demonstrabilă, este falsă şi deci de asemenea nedemonstrabilă. Conchidem că g este o propoziţie adevărată dar indemonstrabilă, iar negaţia sa este falsă şi indemonstrabilă.

Să reprezentăm formal această raţionare.

Presupunem că sistemul considerat se poate referi la orice propoziţie p a propriului său limbaj operând cu *numele* $\ulcorner p \urcorner$ al acestei propoziţii.[8] Şi că acest sistem posedă un

[8]În analiza intreprinsă aici sunt presupuse cunoscute conceptele de "sistem formal", "exprimabilitate", "diagonalizare", "aritmetizare", "funcţii recursive".

concept al demonstrabilităţii, în sensul că în limbajul lui S se poate defini un predicat D, în aşa fel că pentru orice propoziţie p, $D(p)$ înseamnă că p este demonstrabilă în S. Presupunem, în fine, că D este complet, adică

$$(\gamma) \qquad S \vdash D(p) \text{ ddacă } S \vdash p,$$

pentru orice propoziţie p a lui S (cu "$\vdash$" pentru demonstrabilitate în S). Acum, dacă în S putem construi o propoziţie g astfel încât

$$(\delta) \qquad S \vdash g \equiv \neg D(g),$$

atunci, argumentând similar, ajungem la concluzia că $S \vdash g$ ddacă $S \vdash \neg g$. Însă, în acest caz, responsabil de contradicţie este sistemul S. Mai exact, (γ) asertează că o propoziţie $D(\ulcorner p \urcorner)$ este adevărată în S ddacă p este adevărată în S. Însă S însuşi nu ştie acest lucru, adică noi n-am presupus $S \vdash p \equiv D(\ulcorner p \urcorner)$. De aceea concluzia nu este automat că S este inconsistent, ci mai degrabă

$$(\varepsilon) \qquad (S \nvdash g \text{ şi } S \nvdash \neg g) \textit{ sau } S \text{ este inconsistent.}$$

De unde, sub presupoziţia consistenţei lui S, putem deduce

$$(\xi) \qquad S \nvdash g \text{ şi } S \nvdash \neg g,$$

respectiv, existenţa unei propoziţii indemonstrabile în S (şi deci incompletitudinea lui S). În acest fel conduce paradoxul mincinosului la una dintre cele mai mari descoperiri logico-matematice, respectiv fenomenul incompletitudinii.

Să vedem mai îndeaproape cum se prezintă formal un asemenea fenomen.

Fie în cele ce urmează S un astfel de sistem formal. Printr-o numerotare Gödel adecvată orice formulă F are un număr Gödel corespunzător n. Prin $\mathrm{F}_n(k)$ vom înţelege în cele ce urmează o formulă F care are numărul Gödel n şi a cărei singură variabilă liberă este k.

Putem construi acum următoarele două predicate.

$P(k, l)$, cu semnificaţia: k este numărul Gödel al formulei $\mathrm{F}_k(k)$ iar l este numărul Gödel al unei demonstraţii a formulei $\mathrm{F}_k(\boldsymbol{k})$.

$Q(k, m)$, cu semnificaţia: k este numărul Gödel al formulei $\mathrm{F}_k(k)$ iar m este numărul Gödel al unei demonstraţii a formulei $\neg\mathrm{F}_k(\boldsymbol{k})$.

Fie acum $\mathrm{F}(k, l)$ şi $\mathrm{G}(k, m)$ formule care exprimă formal-numeric predicatele $P(k, l)$ şi $Q(k, m)$. Considerăm acum formula $\forall l \neg \mathrm{F}(k, l)$ care conţine pe k ca singura variabilă liberă. Şi fie g numărul Gödel al acestei formule (ea este aşadar formula $F_g(k)$). Pe baza metodei diagonale a lui Cantor substituim pe k din formula $\mathrm{F}_g(k)$ cu numeralul $\boldsymbol{g}$ şi obţinem astfel formula

$$\mathrm{F}_g(\boldsymbol{g}): \quad \forall l \neg \mathrm{F}(\boldsymbol{g}, l)$$

care nu conţine variabile libere. Această formulă afirmă propria ei indemonstrabilitate; exprimă aşadar propoziţia "$\mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$ este indemonstrabilă".

Teorema lui Gödel (Th.G1). *1. Dacă S este un sistem formal consistent, atunci*

$$non \vdash \mathrm{F}_g(\boldsymbol{g}).$$

2. Dacă S este ω-consistent, atunci non $\vdash \neg\mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$. (Aşadar, sub asumpţia ω-consistenţei (ω-con) sistemul conţine o formulă $\mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$ indecidabilă, este deci incomplet).

Demonstraţie. 1. Dacă S este consistent (*con*), atunci *non* $\vdash \mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$.

Reductio ad absurdum. Presupunem contrariul, resp. $\vdash \mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$. Cum formula este demonstrabilă, există o demonstraţie a ei; fie p numărul Gödel al acestei demonstraţii. Aşadar $P(g, p)$ este adevărată şi deci $\vdash \mathrm{F}(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{p})$ (deoarece formula $\mathrm{F}(k, l)$ exprimă formal-numeric predicatul $P(k, l)$. Şi deci $\vdash \exists l \mathrm{F}(\boldsymbol{g}, l)$ (prin introducerea $\exists$). Pe baza echivalenţei cuantorilor, avem $\vdash \neg\forall l \neg \mathrm{F}(\boldsymbol{g}, l)$. Şi deci $\vdash \neg\mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$. Însă, sub presupoziţia făcută mai sus ($\vdash \mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$) rezultă că sistemul S este inconsistent. Sub asumpţia din 1. avem aşadar *non* $\vdash \mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$.

Demonstraţie. 2. Un sistem formal este $\omega - con$ dacă pentru nici o formulă F(x), unde x este o variabilă arbitrară nu sunt adevărate simultan:

$$\vdash \mathrm{F}(0), \vdash \mathrm{F}(1), \vdash \mathrm{F}(2), \ldots; \vdash \neg\forall x \mathrm{F}(x).$$

În caz contrar este ω-inconsistent. $\omega - con$ implică *con*.

Sub asumpţia $\omega - con$ (şi deci a con) avem (mai sus) $non \vdash \mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$. Şi deci nici unul din numerele naturale 0,1,2,... nu este numărul Gödel al unei demonstraţii a formulei $\mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$; în felul acesta toate propoziiile $P(g,0), P(g,1), P(g,2), \ldots$ sunt false. Cum $\mathrm{F}(k,l)$ exprimă formal-numeric $P(k,l)$ rezultă că $\vdash \neg\mathrm{F}(\boldsymbol{g},0), \vdash \neg\mathrm{F}(\boldsymbol{g},1), \vdash \neg\mathrm{F}(\boldsymbol{g},2), \ldots$. Sub asumpţia $\omega - con$, avem aşadar $non \vdash \neg\forall l \neg\mathrm{F}(\boldsymbol{g},l)$, iar această expresie este tocmai $non \vdash \neg\mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$, q.e.d.

Forma Rosser a teoremei lui Gödel

B. Rosser [1] construieşte o formulă indecidabilă mai complicată decât cea a lui Gödel, în care însă ipoteza $\omega - con$ este eliminată. Formula lui Rosser se obţine astfel: considerăm formula $\forall l[\neg\mathrm{F}(k,l) \vee \exists m(m \leq l \& \mathrm{G}(k,m))]$. Fie h numărul ei Gödel. Atunci, prin diagonalizare obţinem

$$\mathrm{F}_h(\boldsymbol{h}): \quad \forall l[\neg\mathrm{F}(\boldsymbol{h},l) \vee \exists m(m \leq l \& \mathrm{G}(\boldsymbol{h},m))].$$

Cum în această formulă expresia care urmează cuantificatorului universal are forma $\neg A \vee B$, echiveridică formulei $A \supset B$, interpretarea expresiei $\mathrm{F}_h(\boldsymbol{h})$ este următoarea: pentru orice demonstraţie a formulei $\mathrm{F}_h(\boldsymbol{h})$ există o demonstraţie a formulei $\neg\mathrm{F}_h(\boldsymbol{h})$, cu un număr Gödel egal sau mai mic, fapt care implică (sub asumpţia simplei consistenţe) că $\mathrm{F}_h(\boldsymbol{h})$ este indemonstrabilă. (Demonstraţia se efectuează similar).

Remarcă. Pe baza numerotării Gödel aserţiunea simplei consistenţe poate fi exprimată în S în diferite moduri. O definiţie a consistenţei poate fi astfel construită: fie predicatul $R(k,l)$ cu semnificaţia "k este numărul Gödel al unei formule F_k iar l este numărul Gödel al unei demonstraţii a formulei F_k"; fie predicatul $S(k,m)$ cu semnificaţia "k este numărul Gödel al formulei F_k iar m este numărul Gödel al unei demonstraţii a formulei $\neg\mathrm{F}_k$". Există formulele $\mathrm{I}(k,l)$ şi $\mathrm{J}(k,m)$ care exprimă formal predicatele R şi S de mai sus. Ideea consistenţei, ca indemonstrabilitate a vreunei formule şi a negaţiei ei, poate fi exprimată în S prin formula $\neg\exists k[\exists l\mathrm{I}(k,l) \& \exists m\mathrm{J}(k,m)]$. La fel de bine, ideea consistenţei, ca indemonstrabilitate a unei formule anume (i.e. 0=1), poate fi astfel exprimată: fie q numărul Gödel al formulei 0=1. Atunci formula este $\mathrm{F}_q(\boldsymbol{q})$, iar indemonstrabilitatea ei este exprimată de formula $\forall l \neg\mathrm{F}(\boldsymbol{q},l)$ sau $\neg\exists l\mathrm{F}(\boldsymbol{q},l)$. Indemonstrabilitatea formulei $\mathrm{F}_g(\boldsymbol{g})$

este exprimată în sistem prin formula $\forall l \neg F(\boldsymbol{g}, l)$ iar această formulă este $F_g(\boldsymbol{g})$. În acest fel, 1. din **Th.G1**, de mai sus, înseamnă implicaţia (demonstrabilă metamatematic)

$$(*) \qquad \vdash con_s \supset F_g(\boldsymbol{G})$$

adică demonstrarea faptului că sub asumpţia consistenţei sistemului S formula $F_g(\boldsymbol{g})$ este indemonstrabilă.

Să presupunem acum că $\vdash con_s$. Din formula $(*)$, prin *modus ponens*, obţinem $\vdash F_g(\boldsymbol{g})$. Însă prin Th.G1 acest fapt este imposibil. De unde, prin *reductio ad absurdum* (metamat.) obţinem nondemonstrabilitatea con_s. Aşadar,

Teorema lui Gödel (Th.G2). *Dacă S este un sistem formal consistent, atunci*

$$non \vdash con_s.$$

Sub asumpţia consistenţei, prin Th.G1, 1, am văzut, formula $F_g(\boldsymbol{g})$ este indemonstrabilă. Însă, în demonstraţia lui 2. avem $\vdash \neg F(\boldsymbol{g}, 0), \vdash \neg F(\boldsymbol{g}, 1), \vdash \neg F(\boldsymbol{g}, 2), \ldots$. Avem aşadar o formulă $F(x)$ (respectiv $\neg F(\boldsymbol{g}, l)$ astfel ca $\vdash F(0), \vdash F(1), \vdash F(2), \ldots$, însă nu este demonstrabil $\vdash \forall x F(x)$ (resp. $F_g(\boldsymbol{g})$. Aceste este fenomenul *ω-incompletitudinii.*[9]

3 Temeiul adevărului unei propoziţii indecidabile şi conceptele abstracte

Din demonstraţiile precedente (secvenţele (ε) şi (ξ), p.6) rezultă că indemonstrabilitatea propoziţiei Gödel, g, are ca presupoziţie *consistenţa* sistemului considerat. Aşa cum, pe de altă parte, conceptul *demonstrabilităţii* este unul a cărui prezentă (sublimată) condiţionează obţinerea rezultatului de mai sus al incompletitudinii. Acestea sunt *concepte*

[9] cf. Tarksi [1]. ω-incompletitudinea explicitează posibilitatea ca un sistem să fie ω-inconsistent fără a fi (simplu) inconsistent, resp. cazul în care într-un sistem ω-incomplet $\vdash \neg\forall x F(x)$ (adică $\vdash \neg F_g(\boldsymbol{g})$). Un asemenea sistem poate fi deci obţinut dacă sistemului iniţial i se adaugă ca axiomă formula $\neg F_g(\boldsymbol{g})$.

abstracte a căror existenţă (nemanifestă) fundamentează comprehensiunea adevărului aritmetic.

Fenomenul ω-incompletitudinii, am văzut, înseamnează existenţa unei formule F(x) (resp. $\neg F(\boldsymbol{g}, l)$) astfel încât sunt demonstrabile toate exemplificările ei dar nu şi formula cuantificată universal ∀xF(x) (care este expresia *adevărată* $F_g(\boldsymbol{g})$). Cum putem justifica adevărul ei?

Cum expresia este cuantificată universal, iar toate exemplificările ei sunt adevărate, putem conchide asupra adevărului ei pe baza clauzei (C) privitoare la cuantificatorul universal (în definiţia inductivă a adevărului). Iar această clauză însemnează simultan:

a) "Toţi x sunt F" (resp. $\forall x F(x)$), unde x ia valorile succesive ale şirului numerelor naturale, înseamnă asertarea unui şir infinit de genul: $F(0), F(1), F(2), \ldots$.

b) *Adevărul* propoziţiei "Toţi x sunt F" este echivalent cu *adevărul* tuturor acestor aserţiuni.

Această comprehensiune a cuantificării universale în CP1 oferă o explicaţie intuitivă modului în care o propoziţie poate fi adevărată, chiar dacă nedemonstrabilă utilizând resursele PA+CP1.

Pe baza acestei clauze a cuantificării universale clasice putem construi un demers inferenţial de următorul gen.

Presupunem că:

(1) Pentru orice număr natural n, $S \vdash F(\boldsymbol{n})$.

Cum adevărul aritmetic se conservă în raport cu demonstrabilitatea în CP1, putem presupune:

(2) Pentru orice număr natural n, Dacă $S \vdash F(\boldsymbol{n})$, atunci $F(n)$ este adevărată în N.

Sub asumpţia (1), din (2), prin *modus ponens*, obţinem

(3) Pentru orice număr natural n, $F(n)$ este adevărată în N. Pe baza (C) de mai sus conchidem

(4) $\forall x F(x)$ este adevărată, resp.

(5) $\forall x F(x)$ (prin Convenţia T (Tarski))[10]

Dacă luăm (1) drept premisă iar (5) drept concluzie, atunci obţinem următorul pas inferenţial:

$$(R-\omega) \quad \frac{\textit{Pentru orice număr natural } n,\ S \vdash \mathrm{F}(\boldsymbol{n})}{\forall x F(x)}$$

care este tocmai regula ω $(R-\omega)$.

În această regulă presupoziţiile obţinerii concluziei $\forall x F(x)$ din premisa considerată sunt:

a) Relaţia de demonstraţie conservă adevărul în S

b) (C)

c) Convenţia T.

Aşadar, cu presupoziţiile menţionate, adevărul propoziţiei indecidabile poate fi fundamentat de regula ω. Dar $R-\omega$, la rândul ei, cum poate fi justificată?

O astfel de justificare, cu referire la formule primitiv recursive, poate fi dată pe baza conceptului ω-consistenţei PA (în acest fel $R-\omega$ realizează o extensie a PA). Iată cum stau lucrurile:

Informal, $\omega-con$ este proprietatea unui sistem formal S astfel încât următoarele două condiţii *nu* au loc simultan:[11]

1. $S \vdash \exists \mathrm{xF(x)}$

2. $S \vdash \neg \mathrm{F}(\boldsymbol{0}), \neg \mathrm{F}(\boldsymbol{1}), \neg \mathrm{F}(\boldsymbol{2}), \ldots$

Formal, următoarea schemă redă $\omega-con$:

$$Bew_s(\ulcorner \exists \mathrm{xF(x)} \urcorner) \rightarrow \exists x \neg Bew_s(\ulcorner \neg \mathrm{F}(\boldsymbol{x}) \urcorner),$$

unde Bew_s reprezintă predicatul demonstrabilităţii, formal exprimabil în S. Conceptul $\omega-con$, am văzut mai sus, a fost introdus de Gödel pentru demonstrarea primei teoreme de incompletitudine. Cu predicatul Bew_s Th.G1 devine:

Fie φ formula $\neg Bew_s(\ulcorner \varphi \urcorner)$, atunci

1. $S + con_s \vdash \neg Bew_s(\ulcorner \varphi \urcorner)$

[10] cf. Tarski, [2] 187-8.

[11] expresie simetrică formulării din demonstraţia Th.G1.2, cf. Smorynski, [1], 852.

2. $S + 1 - con_s \vdash \neg Bew_s (\ulcorner \neg\varphi \urcorner)$,[12] unde $S \equiv PA$.

Aşadar, $R - \omega$ poate fi justificată pe baza ω-consistenţei. Dar $\omega - con$ poate fi, la rândul ei, justificată în vreun mod anume?

G. Gentzen ([1],IV) demonstrează că $\omega - con$ cu referire la formule primitiv recursive (p.r.) cu o singură variabilă liberă (deci 1-con) poate fi stabilită pe baza inducţiei transfinite ε_0 ($\varepsilon_0 TI$).[13] Aici, prin codificarea notaţiilor pentru ordinali $< \varepsilon_0$ (transcrişi în forma normală Cantor în baza ω) putem obţine o relaţie p.r. pe N (care constituie o relaţie de bună-ordonare pe N cu tipul de ordine ε_0. O astfel de relaţie p.r. este evident bine-fundată şi astfel principiul inducţiei este valid peste acea relaţie. Comprehensiunea unei astfel de relaţii depinde însă de două noţiuni abstracte: cea de *ordinal* şi cea de *demonstraţie a teoremei formei normale Cantor.*

La rându-i, poate fi justificată o astfel de conceptualizare? Cum poate fi justificată $\varepsilon_0 TI$?

În mod sigur o astfel de justificare nu poate fi obţinută din comprehensiunea *intuitivă* a şirului numerelor naturale în sensul Peano-Dedekind. Ceea ce se obţine dintr-o astfel de caracterizare este o ω-inducţie (i.e. o inducţie în raport cu relaţia "<" generată de funcţia succesor). Iar $\varepsilon_0 TI$ nu se poate obţine din ω-inducţie. (Structura lui N se poate obţine şi din propoziţii Π_1, care fundamentează $\varepsilon_0 TI$, iar din $\varepsilon_0 TI$ se poate deriva structura numerelor naturale cu tipul de ordine ω).

O altă cale de justificare ar fi cea a constituirii (pe baza relaţiei "<") a unei ordonări cu tipul de ordine ω^n (prin codificarea n-tuplilor ordonaţi de numere naturale printr-un singur număr şi ordonarea lexicografică a codurilor). Însă prin paşi succesivi de acest gen nu putem dobândi o comprehensiune *intuitivă* a ordonării p.r. bine-fundate a codurilor tuturor ordinalilor mai mici decât ε_0. Iată, după Gödel, de ce constituirea unei $\varepsilon_0 TI$

[12] demonstraţii p.17

[13] complexitatea aparatului conceptual reclamat de o astfel de demonstraţie şi extensiunea lui ne obligă să ilustrăm doar ideea menţionată. Pentru a înţelege întreaga ei anvergură cititorul poate consulta, în afara lucrării lui Gentzen [1], de o excepţională claritate şi eleganţă conceptuală, şi Schütte [1], IV şi VII; H. Bachmann [1], II, III şi J.Y. Girard [1], 419-421.

din ordonări aritmetice precedente nu este posibilă: "Denn die Gültigkeit des Rekursionschlusses für ε_0 kann sicher nicht unmittelbar anschunlich gemacht werden, wie das zum Beispiel bei ω^2 möglich ist. Das heisst genauer, man kann die verschiedenen strukturellen Möglichkeiten, die für absteigende Folgen bestehen, nicht mehr übersehen und hat daher keine anschauliche Erkenntnis von der Notwendigkeit des Abbrechens jeder solchen Folge. Insbesondere kann durch schrittweises Übergehen von kleineren zu grösseren Ordinalzahlen eine solche *anschauliche* Erkenntnis nicht realisiert werden, sondern bloss eine abstrakte Erkenntnis mit Hilfe von Begriffen höherer Stufe."[14]

Să rămânem, în cele ce urmează, la analiza relaţiei dintre $\omega - con$ şi $\varepsilon_0 TI$.

4 Principiile reflecţiei, $\omega - con$ şi $\varepsilon_0 TI$

Un rezultat remarcabil în raport cu tema investigată aici este obţinut de Kreisel şi Lévy [1], care demonstrează că extensia PA (Ext_{PA}) cu principiul uniform al reflecţiei pentru PA este echivalentă cu extensia PA prin schema inducţiei transfinite ε_0 ($\varepsilon_0 TI$). Să vedem mai întâi ce sunt principiile reflecţiei pentru un sistem S care conţine PA.

În conformitate cu Keisel şi Lévy [1], printr-un "principiu al reflecţiei" pentru un sistem formal S se înţelege următoarea aserţiune formală care exprimă *corectitudinea* lui S.

Refl. Dacă o propoziţie φ (în formalismul lui S) este demonstrabilă în S, atunci φ este validă.

Pe baza aritmetizării (Gödel), într-un sistem S care conţine predicatul demonstrabilităţii (Bew_s) expresia *Refl* de mai sus devine:

$Refl_g$. $\forall a \forall b[Bew_s(a,b) \rightarrow A_s(b)]$,

unde b ia ca valori formulele lui S, iar A denotă "adevărat". Însă o definiţie a conceptului adevărului în S (A_s) nu se poate da (cf. Tarski [2]). De aceea principiul *global* al reflecţiei ($Refl_g$) nu poate fi exprimat printr-o singură propoziţie, ci mai curând prin:

[14]cf. Gödel, [2], 281.

$Refl_l$. $\forall a[Bew_s(a, \ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi]$, resp. $Bew_s(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$, unde $\ulcorner\varphi\urcorner$ denotă numărul Gödel al lui φ. Aceasta este expresia principiului *local* al reflecţiei.

Dacă φ are o singură variabilă x, iar $s(\ulcorner\varphi\urcorner, x)$ este un termen al lui S astfel că valoarea lui $s(\ulcorner\varphi\urcorner, \boldsymbol{n})$ este numărul Gödel al expresiei obţinute din $\varphi(x)$ substituind numeralul $\boldsymbol{n}$ pentru variabila x, atunci obţinem expresia principiului *uniform* al reflecţiei pentru S:

$Refl_u$. $\forall a\forall n[Bew_s(a, s(\ulcorner\varphi\urcorner)) \to \varphi(n)]$, resp. $\forall x[Bew_s(\ulcorner\varphi(x)\urcorner) \to \varphi(x)]$.

Fie acum φ_0 propoziţia lui Gödel care asertează propria-i indemonstrabilitate în S. Atunci

$$\forall a[Bew_s(a, \ulcorner\varphi_0\urcorner) \to \varphi_0]$$

nu este demonstrabilă în S. Cum φ_0 este echivalentă cu $\neg\exists aBew_s(a, \ulcorner\varphi_0\urcorner)$ rezultă că formula de mai sus nu este demonstrabilă în S (fiind echivalentă cu φ_0).

Cum Bew_s exprimă *predicatul demonstrabilităţii* în S, avem următoarea echivalenţă metalingvistică:

Teorema lui Löb.[15] *$S \vdash \forall a[Bew_s(a, \ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi]$ ddacă φ este demonstrabilă în S; resp. $S \vdash Bew_s(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$ ddacă $S \vdash \varphi$.*

Demonstraţie. Implicaţia directă este evidentă. Pentru demonstraţia implicaţiei converse presupunem că $S \nvdash \varphi$. Atunci $S + \neg\varphi$ este consistent, iar pe baza *Th.G2* conchidem că

$S + \neg\varphi \nvdash con_{s+\neg\varphi}$; resp. $S + \neg\varphi \nvdash \neg Bew_s(\ulcorner\neg\varphi \to \Lambda\urcorner)$,

unde Λ denotă o falsitate. Şi deci

$S + \neg\varphi \nvdash \neg Bew_s(\ulcorner\varphi\urcorner)$,

de unde, prin contrapoziţie, obţinem

$S \vdash Bew_s(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$[16]

Dacă Bew_s exprimă predicatul demonstrabilităţii în S, formula $\exists aBew_s(a, \ulcorner\varphi_0\urcorner)$ exprimă *proprietatea* de a fi demonstrabilă în S (adică existenţa unei astfel de demonstraţii în

[15] cf. Löb [1]

[16] Pentru cazul particular în care φ este $(\psi\&\neg\psi)$, dacă S este un sistem formal consistent, atunci, pe baza *Th.G2*, consistenţa lui S nu este demonstrabilă în S. Aşadar, *Th.Löb* caracterizează exemplificările demonstrabile ale $Refl_l$.

S). Cu această formulă echivalenţa dintre adevăr şi demonstrabilitate capătă următoarea expresie (pentru o formulă φ a lui S):

$\varphi \equiv \exists a Bew_s(a, \ulcorner\varphi\urcorner)$.

Din această echivalenţă obţinem următoarele relaţii:

$\varphi \rightarrow \exists a Bew_s(a, \ulcorner\varphi\urcorner)$, resp. *completitudinea lui* S.

$\exists a Bew_s(a, \ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \varphi$, resp. $Refl_l$, i.e. *corectitudinea* lui S.

$\forall y[\exists x Bew_s(x, s(\ulcorner\varphi\urcorner, y)) \rightarrow \varphi(y)]$, unde $s(\ulcorner\varphi\urcorner, y)$ este un termen din S a cărui valoare este numărul Gödel al expresiei $\varphi(\boldsymbol{n})$, unde $\boldsymbol{n}$ este numele canonic al lui n substituit variabilei y. Din această formulare se poate obţine $\omega - con$ pentru orice formulă de forma $\neg\forall y\varphi(y)$:

$(\omega - con): \ \exists x Bew_s(x, \ulcorner\neg\forall y\varphi(y)\urcorner) \rightarrow \neg\forall y \exists x Bew_s(x, s(\ulcorner\varphi\urcorner, y))$.

Demonstraţia este simplă: prin $Refl_l$, $\exists x Bew_s(x, \ulcorner\neg\forall y\varphi(y)\urcorner) \rightarrow \neg\forall\varphi(y)$. Presupunem că $\forall y \exists x Bew_s(x, s(\ulcorner\varphi\urcorner, y))$; prin $Refl_u$ obţinem $\forall y\varphi(y)$, ceea ce contrazice $\neg\forall y\varphi(y)$, şi deci $(\omega - con)$.

Tot pe baza $Refl_u$ poate fi definit *principiul inducţiei.* Presupunem o teorie $S' \supseteq S$, în care $Refl_u$ pentru S este demonstrabil şi în care este demonstrabil formal faptul că S este închis în raport cu *modus ponens*, respectiv dacă pentru un μ adecvat

$S' \vdash Bew_s(n, s(\ulcorner\varphi\urcorner, m)) \& Bew_s(p, s(\ulcorner\varphi \rightarrow \psi\urcorner)) \rightarrow Bew_s(\mu(m, n, p), s(\ulcorner\psi\urcorner, m))$ şi că S este închis în raport cu substituţia numerică, adică

$S' \vdash Bew_s(p, \ulcorner\forall y\varphi(y)\urcorner) \rightarrow Bew_s(\gamma(p, m), s(\ulcorner\varphi\urcorner, m))$. Se demonstrează mai întâi

a) Dacă $S \vdash \varphi(0)$ şi $S \vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$, atunci $S' \vdash \forall x\varphi(x)$.

Fie p_0 o demonstraţie a lui $\varphi(0)$ şi p_1 o demonstraţie a lui $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$ în S. Atunci $S' \vdash Bew_s(\gamma(p_1, m), s(\ulcorner\varphi \rightarrow \psi\urcorner, m))$, unde $\psi(x)$ este $\varphi(x+1)$. Definim $\pi(0) = p_0$, $\pi(m+1) = \mu(m, \pi(m), \gamma(p_1, m))$. În S' aplicăm inducţia la $Bew_s(\pi(m), s(\ulcorner\varphi\urcorner, m))$.

$S' \vdash Bew_s(\pi(0), s(\ulcorner\varphi\urcorner, 0))$ prin ipoteză;

$S' \vdash Bew_s(\pi(m), s(\ulcorner\varphi\urcorner, m)) \rightarrow Bew_s(\pi(m+1), s(\ulcorner\varphi\urcorner, m+1))$ prin închiderea în raport cu *modus ponens*, şi deci $S' \vdash Bew_s(\gamma(p_1, m), s(\ulcorner\varphi \rightarrow \psi\urcorner, m))$ şi obţinem

$S' \vdash \forall m Bew_s(\pi(m), s(\ulcorner\varphi\urcorner, m))$. De unde, prin $Refl_u$ pentru S generează a).

Pentru a se obţine axioma inducţiei în S' se demonstrează

b) $\forall x_1 \ldots \forall x_n[\psi(0) \& \forall y(\psi(y) \to \psi(y+1)) \to \forall x \psi(x)]$

Pentru aceasta notăm cu $\varphi(x)$ expresia $\forall x_1 \ldots \forall x_m[\psi(0) \& \forall y(\psi(y) \to \psi(y+1)) \to \psi(x)]$.

$\varphi(0)$ şi $\forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$ sunt derivabile în S, şi deci $S' \vdash \forall x \varphi(x)$, adică b).

O relaţie analogă între principiile reflecţiei şi principiile inducţiei poate fi dată pentru PA şi pentru analiză. Pentru o relaţie binată $R(x,y)$ definită de formula $\psi(x,y)$ a PA, cu variabilele libere x şi y, mulţimea tuturor propoziţiilor

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k[\forall x(\forall y(\psi(x,y) \to \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to \forall x \varphi(x)]$$

din limbajul PA se numeşte schema *ψ-inducţiei* (resp. schema R-inducţiei, iar dacă R este bine-fundată, schema *α-inducţiei*, unde α este ordinalul lui R).

Prin *Th.12* ([1], 125) se demonstrează echivalenţa dintre următoarele două sisteme:

a) $PA + \varepsilon_0 - TI$ (resp. R-inducţia transfinită în raport cu ordinalul ε_0)

b) $PA + Refl_u$[17]

Pe de altă parte, $\omega - con$ pentru formulele p.r. ale PA este echivalentă cu $\Sigma_1 - Refl_l$.[18]

Principiile reflecţiei sunt, am văzut mai sus, aserţiuni privitoare la corectitudinea sistemelor formale (orice este demonstrabil este adevărat). Ele implică astfel consistenţa şi, pe baza *Th.G2*, nu sunt demonstrabile în teoreia însăşi.[19] Avem aşadar:

Th.G1. *$S \nvdash Bew_s(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$, unde φ este o propoziţie adevărată dar indemonstrabilă (cea care asertează propria-i indemonstrabilitate).*

Th.G2. *$S \nvdash Bew_s(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$, unde φ este o propoziţie refutabilă.*

---

[17]pentru detalii a se vedea G. Gentzen [1], §§12-15, K. Schütte [1], §22, W. Tait [1] şi [2]

[18]cf. Smorynksi, [1], §4

[19]Utilitatea principiilor reflecţiei este incontestabilă în multe privinte. Să amintim doar două. Mai întâi, dacă S este un sistem corect, atunci principiile reflecţiei oferă o metodă de a construi sisteme mai tari decât S (cf. G. Kreisel [1]). Apoi, ele oferă o metodă de a compara *tăria* unor sisteme formale date: dacă $S \subseteq S'$ iar $Refl_l$ este demonstrabil în S' pentru o clasă de formule care conţine propoziţia φ_0 (care afirmă propria-i indemonstrabilitate), atunci S' are mai multe teoreme decât S. Şi deci demonstrând în S' un principiu al reflecţiei putem infera consistenţa lui S (cf. Mostowski [1]).

Th.G1, în această formulare, se obţine din versiunea iniţială pe baza Th. Löb.

Pentru Th.G2, dacă φ este o propoziţie refutabilă, atunci următoarele expresii sunt echivalente:

$Bew_s(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi, \quad \neg Bew_s(\ulcorner\varphi\urcorner), \quad \neg Bew_s(\ulcorner\Lambda\urcorner), \quad con_s;$

de unde, tot pe baza Th. Löb, obţinem echivalenţa dintre formularea de mai sus şi versiunea iniţială.

Prin $1 - con_s$ Smorynski denotă $\omega - con$ restrânsă la formule primitiv recursive φ cu o singură variabilă liberă. Avem, aşadar

Th.G1 (formalizată). *Dacă* φ *este* $\neg Bew_s(\ulcorner\varphi\urcorner)$, *atunci*

1. $S + con_s \vdash \neg Bew(\ulcorner\varphi\urcorner)$,

2. $S + 1 - con_s \vdash \neg Bew_s(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)$.

Demonstraţie. 2. Fie φ formula $\forall x\psi(x)$, cu $\psi(x)$ p.r. Atunci,

$$S + 1 - con_s \vdash Bew_s(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \to \exists x \neg Bew_s(\ulcorner\psi x\urcorner) \to \exists x\neg\psi(x)$$

pe baza Σ_1-completitudinii lui S (resp. dacă $\varphi \in \Sigma_1$, atunci $S \vdash \varphi(\boldsymbol{x}) \to Bew_s(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)$) şi deci

a. $S + 1 - con_s \vdash Bew_s(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \to \neg\varphi$ şi deci

b. $S + 1 - con_s \vdash Bew_s(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \to Bew_s(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

Cum $1 - con_s$ implică con_s, prin 1. obţinem

$S + 1 - con_s \vdash \neg Bew_s(\ulcorner\varphi\urcorner)$, care cu b. demonstrează 2.

Aici $1 - con_s$ a fost folosită pentru a demonstra a., adică $\Sigma_1 - Refl_l$ pentru S ($Refl_l$ în raport cu formula Σ_1 (deoarece φ este o formulă Π_1)). Şi relaţia conversă poate fi obţinută, respectiv din $\Sigma_1 - Refl_l$ se onţine $1 - con_s$:

$S + \Sigma_1 - Refl_l \vdash Bew_s(\ulcorner\exists x\varphi(x)\urcorner) \to \exists x\varphi(x)$

$S + \Sigma_1 - Refl_l \vdash Bew_s(\ulcorner\exists x\varphi(x)\urcorner) \to \exists x\neg Bew(\ulcorner\neg\varphi(x)\urcorner)$

fiindcă $\neg\varphi(x) \equiv Bew_x(\ulcorner\neg\varphi(x)\urcorner)$ (prin completitudinea p.r. şi implicaţia $\Sigma_1 - Refl_l \to con_s$.

Concluzie. Întrucât inducţia transfinită pentru orice ordinal mai mic decât ε_0 este demonstrabilă în PA rezultă că nici o inducţie transfinită mai slabă decât ε_0 nu poate demonstra $1 - conPA$.

Pe baza următoarelor aserţiuni:

A: Echivalenţa dintre $1 - con_{PA}$ şi $\Sigma_1 - Refl_l$ (Smorynski)[20]

B: Aserţiunea în ierarhia aritmetică face ca $Refl_l$ să fie din ce în ce mai tari.

C: Echivalenţa dintre $PA + \varepsilon_0 - TI$ şi $PA + Refl_u$ (Kreisel; Lévy)

putem conchide asupra faptului că $1 - con_{PA}$ este *mai slabă* decât $\varepsilon_0 - TI$ ($\varepsilon_0 - TI$ demonstrează propoziţii mai tari decât $1 - conPA$).

În fine, pe baza acestor analize succinte, să conchidem asupra relaţiei dintre regula-ω şi $\varepsilon_0 - TI$.

Pentru aceasta vom transcrie $R - \omega$, prin sublimarea conceptului demonstrabilităţii cu ajutorul predicatului $Bew(x, y)$. Respectiv, dacă sistemul considerat este axiomatizat, relaţia de demonstraţie poate fi exprimată prin predicatul primitiv recursiv de mai sus. În felul aceste $R - \omega$ (în expresia ei finită, într-o singură aplicaţie care extinde PA) devine:

$$\frac{Pa \vdash \forall x \exists y Bew_{PA}(y, s(\ulcorner \varphi \urcorner, x))}{\forall x A(x)}$$

Ce justificare are $R - \omega$, în această formulare? Şi în acest caz putem pune în evidenţă o echivalenţă fundamentală.

S. Feferman [1] stabileşte o astfel de echivalenţă între $PA + R - \omega$ şi $PA + Refl_u$. Iată pe scurt acest rezultat remarcabil.

Principiul reflecţiei este descrierea unei proceduri prin care la orice mulţime arbitrară de axiome A se adaugă noi axiome a căror validitate rezultă din validitatea axiomelor A şi care exprimă formal (în limbajul lui A) consecinţe evidente ale asumpţiei că toate teoremele lui A sunt valide. Cum aceste principii nu sunt în general extensionale, ele se referă la o formulă α astfel încât $\varphi \in A \equiv \alpha(\ulcorner \varphi \urcorner)$ este adevărată. Feferman consideră α o formulă RE, astfel că $A = \alpha''$. Prin *Definiţia 2.16* avem:

(i) $A^{(I,\alpha)}$ constă din A plus toate propoziţiile $Pr_\alpha(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$, φ este o formulă/propoziţie.

[20]Propoziţia Paris-Harrington este echivalentă cu $\Sigma_1 - Refl_l$ şi deci este echivalentă cu $1 - con$ a PA: cf. Paris şi Harrington [1], 1141.

(ii) $A^{(I',\alpha)}$ constă din A plus toate φ astfel că $\vdash_A Pr_\alpha(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

(iii) $A^{(II,\alpha)}$ constă din A plus toate propoziţiile $(\forall x)Pr_\alpha(\ulcorner\varphi(x)\urcorner) \to (\forall x)\varphi(x)$, unde φ este o formulă cu singura variabilă α.

(iv) $A^{(II',\alpha)}$ constă din A plus toate propoziţiile $(\forall x)\varphi(x)$ astfel că $\vdash_A$ $(\forall x)Pr_\alpha(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)$.

(v) $A^{(III,\alpha)}$ constă din A plus toate propoziţiile $(\forall x)[Pr_\alpha(\ulcorner\varphi(x)\urcorner) \to \varphi(x)]$.

Fiecăruia dintre aceste principii îi corespunde un principiu al reflecţiei.[21] Dacă $P \subseteq A$ (unde $P \equiv PA$), α este o formulă RE, iar $\alpha'' = A$, atunci prin *Th.2.19*(276), se demonstrează următoarele relaţii:

(i) $A^{(II',\alpha)} \equiv A^{(II,\alpha)} \equiv A^{(III,\alpha)}$

(ii) $A^{(I,\alpha)} \subseteq A^{(II,\alpha)}$ însă $A^{(I,\alpha)} \not\equiv A^{(II,\alpha)}$ (dacă A este $\omega - con$).

Pe baza acestor relaţii şi pe baza C de mai sus putem conchide asupra echivalenţei dintre extensiunea PA prin $R - \omega$ şi extensiunea PA prin $\varepsilon_0 - TI$. Aşadar, justificarea unui concept (i.e. $R - \omega$) nu înseamnă nici mai mult nici mai puţin decât justificarea celuilalt ($\varepsilon_0 - TI$).

În concluzie, are intuiţia o spaţialitate semnificantă *autonomă* şi *imediată* în raport cu conceptul adevărului aritmetic? Credem că nu. Iar acest fapt se relevă de-ndată ce încercăm *să justificăm* adevărul aserţiunilor angajate. Analiza intreprinsă aici decupează în cadrul conceptual explicitat, *spaţialitatea abstractă* care fundamentează (implicit) aserţiunile noastre în raport cu conceptul în discuţie.

[21] Ele sunt versiuni ale principiilor reflecţiei; comp. Smorynski [1], §4. Aici (iv) exprimă $R - \omega$, (iii) exprimă formula $\forall x \exists y Bew_{PA}(y, s(\ulcorner\varphi\urcorner, x)) \to \forall x \varphi(x)$ iar (v) o relaţie mai tare, resp. $\forall x[\exists y Bew_{PA}(y, s(\ulcorner\varphi\urcorner)) \to \varphi(x)]$.

REFERINŢE

1. Bachmann, H., [1] *Transfinite Zahlen*, zw. Aufl. Springer, 1967.

2. Barwise J., (ed.) [1] *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1977.

3. Benacerraf, P.; H. Putnam, [1] *Philosophy of Mathematics*, 2^{nd} ed., Cambridge, 1983.

4. Bernays, P., [1] "Sur le platonisme dans les mathematiques", *L'Enseignement Mathématique*, 34/1935, 52-69; o versiune engl. în Benacerraf and Putnam [1], 258-271.

5. Dedekind, R., [1] *Letter to Keferstein*, in Heijenoort [1], 99-103.

6. Feferman, S.,

   [1] "Arithmetization of metamathematics in a general setting", *Fundamenta Mathematicae*, XLIX/1960, 35-92.

   [2] "Transfinite recursive progressions of axiomatic theories", *Journal of Symbolic Logic*, 27/1962, 259-316.

7. Gentzen, G.,

   [1] "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", *Mathematische Annalen* 112/1936, 493-565.

   [2] "Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie", *Mathematische Annalen*, 119/1943, 140-161.

8. Gödel, K.,

[1] "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38/1931, 173-98; trad. engl. in Heijenoort [1], 596-617.

[2] "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes", *Dialectica*, 12/1958, 280-287.

9. Girard, J.Y., [1] *Proof Theory and Logical Complexity*, vol.1, Naples: Bibliopolis, 1987.

10. Heijenoort, J.v., [1] *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, 1967.

11. Hilbert, D., [1] "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, 95/1925, 161-190; trad. in engl. in Heijenoort [1], 367-392.

12. Hilbert, D.; Bernays, P., [1] *Grundlagen der Mathematik*, vol.I, Berlin 1934, vol.II, Berlin 1939, Springer V.

13. Kleene, S.C., [1] *Introduction to Metamathematics*, North-Holland P.C. Amsterdam 1964 (fourth reprint).

14. Kreisel, G., [1] "Relative consistency proofs" (abstract) *Journal of Symbolic Logic* 23/1958, 109-110.

15. Kreisel, G.; Levy, A., [1] "Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 14/1968, 97-142.

16. Löb, M.H., [1] "Solution of a problem of Leon Henkin", *Journal of Symbolic Logic* 20/1955, 115-118.

17. Mostowski, A., [1] "On models of axiomatic systems", *Fund. Math.* 39/1952, 133-158.

18. Paris, J.; Harrington, L., [1] "A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic", in J. Barwise (ed.) [1], 1133-1142.

19. Peano, G.,

[1] *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Turin 1889.

[2] "Sul concetto di numero", *Rivista di matematica*, vol.1/1891.

20. Rosser, B., [1] "Extensions of some theorems of Gödel and Church", *Journal of Symbolic Logic*, 1/1936, 87-91.

21. Schütte, K., [1] *Beweistheorie*, Springer Verlag, Berlin 1960.

22. Smorynski, C., [1] "The Incompleteness Theorems", in Barwise (ed.) [1] 821-866.

23. Smullyan, R.M., [1] *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford U.P., 1992.

24. Tait, W.W.,

[1] "Functionals defined by transfinite induction", *Journal of Symbolic Logic* 30/1965, 155-174.

[2] "The substitution method", ibid.

25. Tarski, A.

[1] "The concept of truth in formalized languages", in *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford 1956, 152-278.

[2] "Some observations on the concepts of ω-consistency and ω-completeness", ibid., 279-295.

ANEXĂ

Gödel [1], 610

"O relaţie (clasă) se numeşte *aritmetică* dacă ea poate fi definită în termenii noţiunilor $+$ şi $\cdot$ (adunarea şi înmulţirea pentru numerele naturale [notă omisă] şi ai constantelor logice $\vee, -, (x)$ şi $=$, unde (x) şi $=$ se aplică doar numerelor naturale. [notă omisă] Noţiunea de "propoziţie aritmetică" este definită în consecinţă."

Dedekind [1]

"Desigur, nu într-o zi; mai degrabă el este o sinteză construită în urma unei îndelungate activităţi, bazată pe o analiză prealabilă a şirului numerelor naturale aşa cum se prezintă el însuşi, *în experienţă* (subl. V.D.), judecăţii noastre, ca să spunem aşa. Care sunt proprietăţile fundamentale, reciproc independente, ale şirului N, respectiv acele proprietăţi care nu sunt derivabile una din alta, însă din care rezultă toate celelalte? Şi cum am putea dezbăra aceste proprietăţi de caracterul lor specific aritmetic, în aşa fel încât ele să fie subsumate unor noţiuni mai generale sau sub activităţi ale comprehensiunii *fără* de care nici o gândire nu este posibilă ca atare, însă *cu* care se oferă o fundamentare pentru certitudinea şi completitudinea demonstraţiilor şi pentru construirea de noţiuni şi demonstraţii consistente?" ([1], 99-100).

Hilbert [1]

"Iar ca singur instrument pentru acest fapt ne stau la dispoziţie aceleaşi moduri de tratare concret-conţinutiste şi aceleaşi puncte de vedere finitiste ale gândirii ca cele care au fost utilizate pentru derivarea ecuaţiilor numerice în construcţia teoriei numerelor însăşi. Această exigenţă ştiinţifică este realmente realizabilă, adică este posibil să se obţină într-un mod pur intuitiv şi finitist - aidoma adevărurilor teoriei numerelor - şi acele perspicacităţi care garantează certitudinea aparatului matematic." ([1], 171).

Gödel [2], 280

"P. Bernays a subliniat în repetate rânduri[1] că, referitor la faptul indemonstrabilităţii noncontradicţiei unui sistem cu mijloace de demonstraţie mai restrânse decât cele ale sistemului însuşi, este necesară o depăşire a cadrelor matematicii finitiste în sensul lui Hilbert, pentru a demonstra noncontradicţia matematicii clasice sau chiar şi noncontradicţia teoriei clasice a numerelor. Întrucât matematica finitistă este definită ca matematica evidenţei *intuitive*[2], aceasta implică[3] faptul că pentru demonstraţia de noncontradicţie a teoriei numerelor sunt necesare anumite concepte ***abstracte***. Aici, prin concepte abstracte (sau neintuitive) trebuie înţelese acele concepte care sunt, în mod esenţial de ordinul doi sau de un ordin superior, adică cele care nu conţin proprietăţile sau relaţiile *obiectelor concrete* (ale combinaţiilor de semne, de exemplu) ci se raportează la *construcţii ale gândirii* (de exemplu, demonstraţii, enunţuri cu sens ş.a.), unde, în demonstraţii, este utilizată comprehensiunea acestora din urmă şi care nu rezultă din proprietăţile combinatorice (spaţio-temporale) ale combinaţiilor de semne care le reprezintă, ci numai din *sensul* acestora." ([2], 280)

Gödel [2], 281

"Căci validitatea schemei de recursie pentru ε_0 în mod sigur nu poate fi făcută nemijlocit intuitivă, aşa cum este posibil acest fapt la ω^2, de exemplu. Mai exact, aceasta înseamnă că diferitele posibilităţi structurale care există pentru secvenţe descendente nu mai pot fi sesizate în totalitate şi de aceea nu se mai posedă o cunoaştere intuitivă despre necesitatea ruperii fiecărei astfel de secvenţe. În special, prin trecerea treptată de la numere ordinale mai mici la numere ordinale mai mari o asemenea cunoaştere *intuitivă* nu mai poate fi realizată; ceea ce se poate realiza este doar o cunoaştere abstractă cu ajutorul conceptelor de ordin superior." ([2], 281).

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

O ANALIZĂ PE O MAŞINĂ *DE TIP* GÖDEL

MARCEL BODEA

ABSTRACT

The formal domain of abstract mathematical systems and the propositions provable in them (the essentials of Gödel's ideas) can be illustrated using a 'machine language' : The Gödel's machine. This article was written primarily as an investigation and introduction to incompleteness theorems in a way wich is a simplifying factor. We tried to show how a certain computing machine can have very general features in subject to Gödel's argument. We belive that the proofs we give are unusually simple. We then can turn to some incompletness arguments in a general setting. This could be an creative puzzles-aid to teachers of philosophical-logic at either the high school or college level.

Originea gândirii axiomatice ţine de antichitate (Euclid, Arhimede), dezvoltarea sa sub diferite aspecte continuă în modernitate (Spinoza, Newton) dar diversele analize ale structurii şi consecinţelor sale (Frege, Russell, Wittgenstein, Bloomfield, Hilbert, Gödel, etc.) ţin indiscutabil de contemporaneitate. Gândirea axiomatică înseamnă, principial, un lanţ finit de inferenţe corecte predefinite, pornite de la fundamentul oferit de un set (minimal) de axiome şi definiţii univoce (distincte). Baza axiomatică poate fi intuitivă sau convenţională. Şi într-un caz şi în celălalt, aceste aspecte nu intervin în regulile de inferenţiere (în demonstraţii). Impunerea unui set de axiome opreşte regresul la infinit şi face posibile inferenţele deductive într-un număr finit de paşi. Exista convingerea spontană că toate adevărurile care pot decurge dintr-un sistem axiomatic pot fi şi demonstrate ! Aceste aspecte îndreptăţeau şi impresia că orice **maşină**-'axiomatic deductivă cu număr finit de paşi', în condiţii foarte bine specificate, ar putea demonstra toate adevărurile (fiind desigur precizate criteriile de adevăr [pentru maşină]) ce pot decurge din axiomele, definiţiile şi regulile de inferenţă. În acest sens, <u>întrebarea centrală la care vom încerca să răspundem este</u> : *în condiţii date (semne, axiome, reguli, criterii de adevăr, etc.), poate tipări o astfel de **maşină** toate expresiile adevărate posibile* ? [1]

[1] Fără a opri regresul la infinit prin axiomatizare, altfel spus în absenţa axiomelor, alternativa care se impune este circularitatea. Să presupunem că "învăţăm" (programăm) o **maşină** să definească (ex. : să genereze prin recurenţă, prin modalităţi definite de asociere, etc.) diferite "cuvinte" şi să formeze astfel un dicţionar ; în plus, nu pot să existe în dicţionar cuvinte definite în afara termenilor din dicţionar şi nici un cuvânt nu poate fi autoreferenţial (s-ar crea o situaţie în care ar fi posibilă axiomatizarea). Este introdusă în acest fel circularitatea. Aceste aspecte nu sunt avute în vedere în consideraţiile de faţă, ele doar au fost semnalate ca existând sub forma unei alternative la "liniaritatea" sistemelor axiomatic-deductive.

Aşa cum în fizică există *experimente mentale* în matematică există *mecanisme ipotetice*, un astfel de mecanism fiind şi maşina virtuală (aici o *anumită* maşina virtuală) numită **maşina Gödel**. Pornind de la un model din litaratura de specialitate[2] al unei astfel de maşini, vom construi în continuare o maşină *asemănătoare*, o variantă pe care o vom numi : maşină <u>de tip</u> Gödel. Ea a fost aici astfel construită încât ne-o putem imagina ca fiind practic (fizic) un calculator. Strategia analizei pe această maşină este de tip logico-matematic. Să presupunem existenţa unei *maşini* care poate efectua o *operaţie externă* : *tipărirea*. Vom considera această operaţie externă ca fiind modul în care maşina 'comunică' cu exteriorul său. Această operaţie externă se regăseşte sub forma unei 'secvenţe-instrucţiune' înglobată în cadrul unei fraze ('*fraza*' va fi definită). Presupunem că maşina <u>poate tipări</u> o expresie ('*expresie*' care va fi definită) a cărei structură este formată dintr-o secvenţă finită compusă din următoarele cinci *simboluri de bază* :

~ , P, N, 1, 0

Semnificaţia acestor simboluri este următoarea :

~ : *negaţie*

P : *tipărire*, cu observaţia că, dacă după acest simbol sunt prezente alte simboluri, maşina 'va înţelege' că P este o operaţie (externă) efectivă, adică executabilă în anumite condiţii (de exemplu, PX înseamnă : tipăreşte fraza X) ; dacă după acest simbol nu este prezent alt simbol, el va fi tratat de maşină ca un simplu simbol şi nu ca o instrucţiune (de exemplu, PP înseamnă tipăreşte simbolul P ; primul P este o instrucţiune pe când al doilea P este un simplu simbol)[3]

N : *normă*, cu referire la o *frază* X [*frază X* care va fi definită mai jos] ; este un simbol abstract pe care îl putem reprezenta simplu astfel : N(X) [s-au introdus aici două simboluri ( ) suplimentare doar pentru această precizare, având simpla funcţie de 'delimitatori' ; un tip de normă N va fi, de asemenea, definit mai jos]. Norma N este, în esenţă, o *operaţie sintactică internă* de construcţie lingvistică pornind de la elemente de vocabular şi limbaj.

1 şi 0 : sunt *simboluri de reprezentare* în notaţie binară a simbolurilor de bază (~, P, N, 1, 0), a numerelor naturale, precum şi a altor combinaţii (şiruri finite) - arbitrare sau nu- formate cu ele.

Prin « *expresie* » E vom înţelege un <u>şir finit</u> de astfel <u>de simboluri</u>. O expresie E va fi 'tipăribilă' doar dacă maşina o poate tipări (ce poate tipări maşina trebuie definit).

<u>**SPECIFICARE** (definiţie) importantă</u> : <u>**maşina** va tipări doar combinaţii de simboluri pe care *le poate recunoaşte* ca fiind şiruri finite de combinaţii de simboluri de bază şi de numere naturale, toate reprezentate în notaţie binară</u> ! [S1]

---

[2] « *Recent (P. T. Geach,* LOGIC MATTERS, *University of California Press, Berkeley, 1980 şi Raymond M. Smullyan, recenzie la cartea de mai sus, în "The Mathematical Intelligencer", vol. 3, 1981, no. 3, p. 39-40), gândirea lui Gödel a fost ilustrată cu ajutorul unor mecanisme ipotetice care facilitează accesul la antinomiile gödeliene [...]* » - Solomon MARCUS în "***Provocarea ştiinţei*** § *O maşină Gödel*" – Bucureşti, Editura politică, 1988, p. 71. Ca lucrare de specialitate referenţială am folosit pentru analiza de faţă : Raymond M. SMULLYAN în "***Gödel"s Incompleteness Theorems*** ", New York, Oxford, Ed. Oxford University Press, 1992 ; modelul de faţă, deşi mult diferit, are la bază : § *A Gödelian Puzzle* (p. 2) şi § *A Variant of the Puzzle* (p. 3)".

[3] Nu se va intra aici în multitudinea de detalii care se pot ridica cu privire la raportul simbol - instrucţiune într-o frază mai complexă. Vor fi considerate doar situaţiile cele mai simple. La o adică, limitarea la acestea poate fi postulată.

Avem în acest fel un *vocabular V* alcătuit din cinci elemente şi posibilitatea formării unor *şiruri finite* pe acest vocabular, şiruri numite *fraze*. Un acelaşi element din vocabularul V poate să apară, evident, de mai multe ori într-un şir finit. Admitem posibilitatea existenţei unor fraze [expresii] (şiruri finite pe vocabularul V) netipăribile[4] (vor fi predefinite mai jos astfel de fraze). Un exemplu de frază netipăribilă este o combinaţie de 0 şi 1 pe care maşina nu o poate asocia cu o combinaţie de simboluri de bază şi numere naturale reprezentate în notaţie binară.

Vom numi *enunţ (propoziţie)* una şi numai una dintre următoarele patru forme combinatorice[5] :

1.) P X
2.) ~ P X [S2]
3.) P N X
4.) ~ P N X

unde X este o *frază*, nu neapărat tipăribilă, dar construită pe vocabularul V.

Să precizăm că problema de a fi sau nu tipăribilă o frază (oricât de simplă sau de complexă) se pune numai în cadrul unui enunţ. Dacă o succesiune de simboluri de bază constituită într-o succesiune de semnificaţii interpretate conform precizărilor de mai sus nu este încadrabilă într-una din cele patru forme de enunţ, nu are sens problema tipăririi sau a netipăririi ei. Se face următoarea convenţie importantă : dacă maşina tipăreşte, atunci ea tipăreşte întregul enunţ şi nu secvenţe din succesiunea de simboluri ale unui enunţ : de exemplu, enunţul PX care semnifică 'tipăreşte fraza X' va fi tipărit de maşină PX şi nu numai X. (X şi PX sunt două fraze diferite ; de către noi, această ultimă frază ar putea fi interpretată astfel : (calculatorul :) 'am tipărit fraza tipăribilă X conform instrucţiunii de tipărire' ; înainte de tipărire P este instrucţiune dar după tipărire P este un simbol în frază (!); astfel de precizări suplimentare vor fi considerate însă ca abuz de explicitare şi vor fi evitate.)

Vom considera cel mai simplu (şi pragmatic totodată) caz : asocierea la fiecare enunţ a unui *număr* de tip *Gödel*[6] reprezentând un şir finit de 0 şi 1. Astfel, simbolurilor individuale introduse mai sus, li se asociază următoarele *numere* 'de tip' *Gödel*[7] *:*

~ : 10 ; P : 11 ; N : 100 ; 1 : 1 ; 0 : 0 ;

Să observăm că '0' şi '1' au o reprezentare binară (reprezentarea binară uzuală) ca simboluri aparte, independente, în cadrul unui vocabular.

---

[4] Există, pornind de la un vocabular V, propoziţii. Definim (convenţional) ceea ce este un "secret". Un secret va fi, *în urma definiţiei(convenţiei)*, o propoziţie care nu poate fi spusă. În felul acesta avem, peste acelaşi vocabular V, propoziţii care pot fi spuse şi propoziţii care nu pot fi spuse (adică "secrete"). O frază de felul : « nu spune un secret (nu spune ceea ce nu poate fi spus) » pare "a fi în regulă". O frază de felul : « spune un secret (spune ceea ce nu poate fi spus) » "pare a nu fi în regulă".

[5] După Raymond M. SMULLYAN "***Gödel"s Incompleteness Theorems***" (*A Gödelian Puzzle*, p. 2) – New York, Oxford, Ed. Oxford University Press, 1992

[6] Numărul de tip Gödel este înţeles aici într-un anumit sens, sensul din Raymond M. SMULLYAN "***Gödel"s Incompleteness Theorems***" – New York, Oxford, Ed. Oxford University Press, 1992, p. 3 (« the *Gödel number* of the expression »)

[7] În analiza de faţă ne îndepărtăm prin construcţia noastră de unele din convenţiile, construcţiile şi interpretările date de Raymond M. SMULLYAN în "***Gödel"s Incompleteness Theorems***" – New York, Oxford, Ed. Oxford University Press, 1992 precum şi de cele -cu un accentuat caracter pedagogic- prezentate de Solomon MARCUS în "***Provocarea ştiinţei***" – Bucureşti, Editura politică, 1988, p. 71-72

Pentru a face prezentarea cât mai succintă şi pentru a evita anumite ambiguităţi – cum ar fi reprezentarea binară identică a simbolurilor ~, P şi N cu a numerelor 2, 3 şi 4 - care pot să apară (şi a căror evitare ar încărca expunerea de faţă cu consideraţii suplimentare dar ne necesare pentru scopul acestei expuneri), vom face explicit precizarea că în componenţa (structura) frazei X pot intra (şi) numere naturale 'n' scrise în formă binară, cu condiţia n ≥ 5 [repetăm este o condiţie suplimentară impusă doar pentru *simplitatea* şi *condensarea* expunerii ; am putea, pe de altă parte, ca în loc de ~, P şi N să considerăm 2, 3 şi 4 cu respectiv aceleaşi semnificaţii dar prima opţiune fiind mai familiară este mai simplă iar simplitatea este o condiţie de bază permanent avută în vedere aici].

În felul acesta, unui enunţ compus, oricât de complex, i se asociază în mod unic un *număr* de tip *Gödel* prin simpla înlocuire (atribuire) a numărului Gödel fiecărui simbol individual din enunţ. De exemplu, pentru cele patru enunţuri de mai sus –cu precizarea că frazei X îi este asociat de fiecare dată un număr Gödel, pe care însă nu-l specificăm aici- numerele Gödel (incomplete în sensul specificat anterior) sunt :

P X	:	11 X
~ P X	:	1011 X
P N X	:	11100 X
~ P N X:		1011100 X

Vom conveni să definim '*norma* N' cu referinţă la o frază X ca fiind fraza urmată de numărul său Gödel. În variantă simbolică : N(X) = XX. Este în fond vorba de o construcţie (compunere) sintactică dintre cele mai simple : repetarea (prin simpla alipire) a unei fraze. De exemplu, *norma* N a frazei « P 0 1 P » este reprezentabilă : a.) P01PP01P sau b.) P01P110111 , etc., cu observaţia că deşi noi, pe hârtie, putem scriem de exemplu : P01PP01P, maşina îşi 'scrie' (reprezintă) aceasta ca 110111110111 (numărul gödel al expresiei) ; ea poate tipări însă sub forma P 0 1 P P 0 1 P. În plus, ea va şti să interpreteze, de la caz la caz, fraza X = 110111110111 ca 'frază-normă' X = N(P 0 1 P) sau ca 'frază-număr natural' $X = 1x\ 2^{11} + 1x\ 2^{10} + \ldots.. + 1x2^{0}$. (Observaţie : asupra felului în care 'dialogăm' cu maşina se pot face o serie de alte observaţii şi convenţii dar explicitarea lor nu este necesară aici în vederea scopului propus [a se vedea şi nota de subsol 12]).

Fie un sistem de numeraţie în baza B ($B \in \mathbf{N}$, $B \geq 2$).

Orice număr natural nenul « n » :

- se poate scrie în mod unic sub forma unei egalităţi de forma :

$$n = \sum_{i=0}^{m} a_i B^i = a_m B^m + a_{m-1}B^{m-1} + \ldots.. + a_1B^1 + a_0 \text{ , } a_m \neq 0 \text{ , } m \in \mathbf{N} \qquad [1]$$

sau

- reprezenta ca o succesiune de forma :

$$n = a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots.. a_2 a_1 a_0 \text{ , cu } a_i \in \{ 0, 1, \ldots.. , m - 1 \} \qquad [2]$$

Fie B = 2 (reprezentarea binară)[8]. Atunci : $a_i \in \{ 0, 1 \}$ şi $n = \sum_{i=0}^{m} a_i 2^i$

[8] În tratarea logico-matematică propriu-zisă, situaţia este mai "complicată". A se vedea în acest sens : Raymond M. SMULLYAN - "***Gödel"s Incompleteness Theorems***" – cap. II *Tarski"s Theorem for Aritmetic, P.II Concatenation and Gödel Numbering, §4 Concatenation to the Base B b*, p. 20 şi *§5 Gödel Numbering*, p. 22

Pentru n = 2, reprezentarea binară este : ($2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$) '10' ceea ce coincide cu reprezentarea binară pentru negaţie '~ '. Pentru n = 3, reprezentarea binară este : ($2 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$) '11' ceea ce coincide cu reprezentarea binară pentru 'P (imprimare)'. Pentru n = 4, reprezentarea binară este : ($2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$) '100' ceea ce coincide cu reprezentarea binară pentru 'N (normă) '. Justificăm în acest fel, într-o primă aproximaţie, condiţia $n \geq 5$ (evităm, pentru început, 'punerea' maşinii într-o stare de ambiguitate : pusă să tipărească, de exemplu, –printr-un mecanism de convertire simbolică- la imprimantă : X = 10 (pentru această egalitate a se vedea mai jos (**)), ar avea două alternative : '~' sau '2').

Fie acum, pentru exemplificare, egalităţile şi succesiunile următoare :

$n = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ '100001'$\rightarrow n = 33$

$n = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ '100010' $\rightarrow n = 34$; etc.

Se observă că o frază X de felul '011001' (sau de felul '000101', (etc.)) nu reprezintă nici un număr natural în reprezentare binară conform condiţiilor din relaţia [1] şi deci nu este tipăribilă. Dacă vom considera o succesiune de simboluri –frază Y- peste vocabular V de felul '011001' se observă uşor că aceasta nu este o expresie conform convenţiei [S2] şi deci nici nu se pune (nu are sens) problema tipăririi ei. Să mai observăm tot aici, fără demonstraţie deocamdată, că norma frazei X de mai sus nu este de asemenea tipăribilă.

Pentru 'maşina de tip Gödel' pe care o propunem – din considerente de simplitate şi pentru o mai mare relevanţă logică a răspunsului- vom facem o serie de convenţii explicite.[9]

Introducem noţiunea '*frază de bază (elementară)*' şi o definim astfel : *o frază dată este elementară (de bază) dacă în structura ei nu intră nici unul din simbolurile de bază ca simboluri explicite de bază* [presupunerea π_1]. Altfel spus, iniţial –şi numai pentru fraza iniţială (!)- nici o combinaţie (secvenţă) de simboluri binare în cadrul unui şir finit de simboluri binare nu reprezintă (şi) simboluri de bază : '~', 'P', 'N', '0' şi '1' luate ca atare.

Vom numi condiţiile de mai jos *calitatea* unei fraze :

condiţia Cd_1 : **X – tipăribilă** (fie Z o frază de bază, $Z \in \mathbf{X}Cd_1$)

F_1 PX - înseamnă : tipăreşte fraza tipăribilă X

F_2 ~PX - înseamnă : nu tipări fraza tipăribilă X

condiţia Cd_2 : **X – non-tipăribilă** (sau **netipăribilă**) (fie Y o frază de bază, $Y \in \mathbf{X}Cd_2$)

F_3 PX - înseamnă : tipăreşte fraza netipăribilă X

F_4 ~PX - înseamnă : nu tipări fraza netipăribilă X

F_1, F_2, F_3, F_4 sunt *enunţuri*. Vom numi *enunţuri de bază* unul din enunţurile de mai sus dacă X este o frază de bază (Z sau Y). În caz contrar, enunţurile sunt *enunţuri compuse* (de exemplu : PNZ ; ~PN(~PNY) ; etc.).

Se observă că fraza (enunţul) F_3 pune maşina într-o stare de 'conflict'. Vom numi enunţul F_3 *nepermis*. (Acesta –conform [C_A] de mai jos- va fi considerat ca fiind şi un enunţ fals.)

Se observă că enunţurile PX şi ~PX sunt 'fireşti' în condiţiile Cd_1 respectiv Cd_2 iar enunţul (fraza) ~ PX nu pune maşina într-o stare de conflict nici în Cd_1. Vom impune astfel (se poate face şi pur convenţional) următoarele două criterii de '*permisivitate*' ale enunţurilor :

[9] Pentru un set de convenţii complexe în abordarea propriu-zisă logico-matematică, se poate consulta în detaliu : Raymond M. SMULLYAN - "***Gödel"s Incompleteness Theorems***" – cap. I *The General Idea Behind Gödel"s Proof, P.I Abstract Forms of Gödel"s and Tarski"s Theorems (Introduction, §Expresibility in L, § Gödel"s Sentences)* şi *P.II Undecidable Sentences of L*, p. 5 - 13

- PX este permisă în condiția Cd_1 [C_{P1}]
- ~PX este permisă în condițiile Cd_1 şi Cd_2 [C_{P2}]

În acest ultim caz nimic nu împiedică convenția : ~PX este o frază netipăribilă indiferent de apartenența frazei X la **X**Cd1 sau la **X**Cd_2.

Să definim acum un : *enunț clar*. Vom folosi pentru aceasta o analogie cu funcțiile biunivoce (injective) din matematică : « Se spune că funcția f : E → F este biunivocă dacă oricare ar fi elementele $e_i \neq e_j$ din E, avem $f(e_i) \neq f(e_j)$ din F (adică două elemente diferite din E au imagini diferite în F). » Un enunț este *clar* dacă *permisivitatea* sa este biunivocă pe mulțimea frazelor **X**Cd1 ∪ **X**Cd_2 în sensul în care este permis sau numai în raport cu **X**Cd1 sau numai cu **X**Cd_2.

Vom conveni să afirmăm [*criteriu de adevăr* [C_A]] că un *enunț de bază permis* este *adevărat* dacă operatorul său extern coincide cu calitatea enunțului. În acest caz enunțurile F_2 şi F_3 vor fi considerate false. (Obs. Pentru enunțurile compuse este considerat primul operator extern din stânga.) În plus, pentru enunțurile compuse se impune condiția (suplimentară) ca toate enunțurile din componența sa să fie adevărate. Astfel -se observă uşor-, un enunț clar este întotdeauna adevărat pe când un enunț neclar poate fi adevărat. Enunțurile F_1 şi F_4 (cele mai 'naturale' enunțuri) sunt enunțuri adevărate.[10] În acest fel au fost definite precis enunțurile adevărate pentru **maşină**. (Să observăm doar –aspect neesențial pentru analiza de față- că un enunț adevărat poate fi considerat clar în măsura în care acceptăm că adevărul său impune o restricție care face permisivitatea sa biunivocă.)

Cu aceste convenții am încercat să fim apropiați –într-un mod cât mai simplu dar riguros- atât de limbajele naturale cât şi (mai ales) de limbajele formale (cu 'axiome', 'sintaxă' şi 'demonstrabilitate'.)[11]

De abia în aceste condiții devine cu adevărat legitimă întrebarea centrală a analizei de față. În continuare va fi formulată această întrebarea centrală, foarte importantă prin consecințele pe care răspunsul le are, pentru analiza de față :

$I_?$: Poate maşina să tipărească, principial, toate enunțurile adevărate ?

O soluție –mai explicită, şi diferită, în raport cu schema standard a soluțiilor din literatura de specialitate - fi dată în continuare. Vom apela la o construcție lingvistică şi la două teoreme complementare, necesare în exploatarea respectivei construcții lingvistice.

Fie construcția următoare :

[C_*] Considerăm mulțimea tuturor frazelor tipăribile (permise) care rezultă din considerațiile implicate în [1] şi [2] : orice număr natural nenul « n » se poate scrie în mod unic sub forma unei egalități de felul : $n = a_mB^m + a_{m-1}B^{m-1} + \ldots + a_1B^1 + a_0$, $a_m \neq 0$, $m \in \mathbf{N}$, [1] sau reprezenta ca o succesiune de forma : $n = a_ma_{m-1}a_{m-2} \ldots a_2a_1a_0$, cu $a_i \in \{ 0, 1, \ldots, m-1 \}$, [2] ; pentru B=2 (reprezentarea binară) cazul care interesează aici : $a_i \in \{ 0, 1 \}$. Condiția ca $a_m \neq 0$, $m \in \mathbf{N}$, face ca în reprezentarea binară cu $a_i \in \{ 0, 1 \}$, $a_m = 1$ întotdeauna. Altfel spus, reprezentarea [2] este întotdeauna de forma : $1a_{m-1}a_{m-2} \ldots a_2a_1a_0$. Construim

---

[10] Care ar fi consecințele introducerii unei convenții de felul - C_2 : Enunțul « 2.) » este evaluat ca *adevărat* dacă fraza X nu este tipăribilă ? Maşina va "citi" astfel : nu tipări fraza X dacă fraza X nu este tipăribilă. Deci, prin această convenție, fraza (enunțul) ~PX este *adevărată* dar nu este tipăribilă !! În acest fel însă, printr-o simplă convenție, în mod direct (adică explicit formulat în convenție) o frază poate fi adevărată dar netipăribilă !

[11] În plus față de nota "9" recomandăm Raymond M. SMULLYAN - "***Gödel"s Incompleteness Theorems***" – cap. II *Tarski"s Theorem for Aritmetic, P.I The Language L_E §1 Syntactic Preliminaries* p. 14 şi *§2 The Notion of Truth in L_E* p. 17

acum o mulțime **Y** de fraze, în felul următor : fiecărei fraze reprezentată binar conform [2] : $1a_{m-1}a_{m-2} \ldots a_2a_1a_0$ îi asociem o frază de forma : $a_{m+k}a_{m+k-1} \ldots 1a_{m-1}a_{m-2} \ldots a_2a_1a_0$, unde $k \geq 1$, $k \in \mathbf{N}$, cu condițiile : $a_{m+1}, \ldots a_j, \ldots a_{m+k-1} \in \{0, 1\}$ şi $a_{m+k} = 0$. Este evident, datorită în principal acestei ultime condiții, că această construcție –deşi binară în sensul unei succesiuni de simboluri 0 şi 1- nu este reprezentabilă în sensul [2] (şi implicit [1]) deci nu reprezintă nici un număr natural $n \geq 5$. (Observație : ea nu reprezintă, la o adică, nici vreunul din simbolurile P, N sau 1. Deoarece indicele lui a este 'm+1', pentru m = 0 în reprezentarea [1], construcția conduce la doi termeni, respectiv la două simboluri în reprezentarea [2] şi deci această construcție nu poate reprezenta nici simbolul 0.) În plus, s-a precizat că o frază este tipăribilă doar în cadrul unui enunț (de tip « 3.) » sau « 4.)). Vom limita referințele cu privire la fraze netipăribile în cadrul unui enunț doar la clasa (mulțimea) frazelor **Y** astfel construite.[12]

Se demonstrează simplu acum, următoarea lemă :

LEMA L_1 ***Norma unei fraze din clasa Y ($Y \in \mathbf{X}Cd_2$) nu ete tipăribilă.***

Fie construcția de mai sus [C*]. Fie o frază netipăribilă $Y \in \mathbf{Y}$. Conform definiției de mai sus pentru norma unei fraze : NY = YY. Să arătăm că : fraza $YY \in \mathbf{Y}$, adică YY nu este tipăribilă.

Fraza Y este de forma : $a_{m+k}a_{m+k-1} \ldots 1a_{m-1}a_{m-2} \ldots a_2a_1a_0$, unde $k \geq 1$, $k \in \mathbf{N}$, cu condițiile : $a_{m+1}, \ldots a_j, \ldots a_{m+k-1} \in \{0, 1\}$ şi $a_{m+k} = 0$. Fraza YY, adică norma N a lui Y : NY va fi atunci de forma : $a_{m+k}a_{m+k-1} \ldots 1a_{m-1}a_{m-2} \ldots a_2a_1a_0a_{m+k}a_{m+k-1} \ldots 1a_{m-1}a_{m-2} \ldots a_2a_1a_0$. Aceasta este o frază $a_\omega a_{\omega-1} \ldots a_j \ldots a_0$ cu $a_j \in \{0, 1\}$ şi cu $a_\omega = a_{m+k} = 0$. Întrucât $a_\omega = 0$, fraza YY = NY este netipăribilă : $NY \in \mathbf{Y}$.

Observație. În mod asemănător se demonstrează LEMA L_2 : *pentru clasa* ***Z*** *($Z \in \mathbf{X}Cd_1$) a frazelor reprezentabile [2], norma unei fraze $Z \in \mathbf{Z}$, este tipăribilă : $NZ \in \mathbf{Z}$.*

TEOREMĂ O maşină Gödel nu poate tipări toate frazele adevărate.

Demonstrația va fi făcută încercând să construim o frază adevărată şi netipăribilă.

Vom construi o frază netipăribilă. Singura posibilitate este fraza ~PX. Pentru ca această frază să fie netipăribilă în raport cu o frază permisă, trebuie ca fraza X să fie un enunț, căci numai enunțurile pot fi permise. Întrucât dorim să pornim de la o frază de bază

[12] Există o mulțime de alte aspecte importante la care, într-o analiză de detaliu, ar trebui făcută referire. Propunem cititorului ca dacă la o lectură extrem de detaliată a textului de față apar astfel de chestiuni, să introducă ipoteze simplificatoare suplimentare, care să nu contrazică însă ipotezele din textul explicit. De exemplu, s-ar putea ridica întrebarea : cum "citeşte", cum "interpretează" maşina o succesiune de simboluri binare care îi sunt date (adică nu şi le construieşte) la un moment dat ? Răspunsul trebuie căutat în direcția cea mai avantajoasă : va căuta în primul rând să recunoască un enunț din cele patru formulate şi pe urmă fraze de tip X sau Y.

Vom presupune deci că, maşina, după ce a recunoscut instrucțiunile dintr-un enunț va încerca să identifice frazele din enunț ca fiind sau nu tipăribile şi să estimeze, în consecință, enunțul în totalitatea sa.

Dincolo de toate aceste aspecte, concluzia finală la care se urmăreşte a se ajunge, este la fel de importantă (prin consecințele sale) chiar dacă nu se ajunge la ea prin cel mai general şi explicit mod, care poate avea dezavantajul că este încărcat, complicat şi greu de urmărit. În plus ar trebui făcute sau presupuse un set de considerații prealabile de specialitate ceea ce nu face obiectul studiului de față, studiu care se vrea doar un demers (cât mai riguros) de clarificare analitică -prin apel la exemplu- al unor chestiuni dificile, a căror tratare completă logico-matematică să poată fi accesibilă într-un final.

(frază care satisface presupunerea π_1) fie aceasta $Y \in \mathbf{Y}$ *(* respectiv $Y \in \mathbf{X}\mathrm{Cd}_2$) sau $Z \in \mathbf{Z}$ (respectiv $Z \in \mathbf{X}\mathrm{Cd}_1$) . Întrucât dorim să avem o construcție-frază cu o *operație sintactică internă*, fie frazele rezultate în urma aplicării acestei operații : NY(= YY) sau NZ(= ZZ). Conform lemei L_1 fraza $NY \in \mathbf{Y}$ *(* $NY \in \mathbf{X}\mathrm{Cd}_2$) și este deci netipăribilă iar conform lemei L_2 fraza $NZ \in \mathbf{Z}$ *(* $NZ \in \mathbf{X}\mathrm{Cd}_1$) și este deci tipăribilă. (Observație : fraza NY (sau YY prin construcție !) nu mai este o frază de bază (inițială)).

În acest caz, singurele enunțuri X posibile, sunt : X = PNZ, X = ~PNZ și X = ~PNY ;(această 'egalitate : =' înseamnă că atribuim simbolului-variabilă de frază X una din construcțiile lingvistice anterioare - (**)). Să le analizăm pe rând :

X = PNZ este adevărat (conform criteriului de adevăr [C_A])
X = ~PNZ este doar permis (conform criteriului de permisivitate [C_{P2}])
X = ~PNY este adevărat (conform criteriului de adevăr [C_A])

În aceste condiții despre enunțurile următoare se pot face afirmațiile :

~P(PNZ) este doar permis
~P(~PNZ) nu este un enunț compus doar din enunțuri adevărate
~P(~PNY) este adevărat !

Am construit astfel –conform intenției inițiale- **enunțul ~P(~PNY)** care **este un enunț adevărat și netipăribil** ! Teorema este, în acest fel, demonstrată.
(Supunem atenției întrebarea : cum s-ar fi schimbat demonstrația –și cum ar putea fi interpretate consecințele- teoremei dacă s-ar fi introdus condiția suplimentară 'tare' ca mașina să tipărească doar enunțuri adevărate ?)

Consecințe :

Pornind de la rezultatul aceastei teoreme în cazul unei astfel de mașini de tip Gödel și înlocuind « P – tipăribil » cu « D – demonstrabil » și, mai mult, « mașină (Gödel) - 'axiomatic deductivă cu număr finit de pași' » cu « sistem formal » (mașina Gödel joacă rolul unui sistem formal în sensul lui Gödel) și reluînd analiza cu semnificația curentă, comună intuitivă (în sensul de ne bine definită) a demonstrabilității « D », se înlesnește accesul la înțelegerea conținutului unor teoreme de felul următoarei **teoreme abstracte de tip Gödel** : *în orice sisteme formale există enunțuri adevărate dar nedemonstrabile.*

Analiza de mai sus arată că demersul analitic -propedeutic sau de clarificare- în vederea înlesnirii accesului la probleme dificile nu este întotdeauna un demers ușor de explicitat. Analiza atentă pe modele simplificate arată totodată numeroasele aspecte care par a trebui luate în considerare dar care ori trebuiesc precizate în sensuri cât mai simplificatoare ori pur și simplu trebuiesc, pentru început cel puțin, ignorate. Observațiile cu privire la ce se poate sau ce nu se poate ignora, ce anume ar trebui introdus suplimentar, ce se poate formula superficial sau pe ce anume trebuie insistat, ajută pe de altă parte la delimitarea chestiunilor considerate importante pentru o anumită direcție. O mașină de tip Gödel poate fi considerată ca fiind un instrument analitic în sensul precizat mai sus, vizând accesul logico-matematic la TEOREMELE LUI GÖDEL.

BIBLIOGRAFIE

1. Raymond M. SMULLYAN, *Gödel's Incompleteness Theorems*, New York, Oxford, Ed. Oxford University Press, 1992.
2. Raymond M. SMULLYAN, *Forever undecided (A Puzzle Guide to Gödel)*, Oxford University Press, 1987.
3. Charles PARSONS, *Mathematics in Philosophy (selected essays)*, Ithaca, New York, Cornell University Press, 1983.
4. Martin GARDNER, *Logic machines and diagrams*, New York, Mc. Gaw- Hill Book Company, 1958.
5. Carol L. KARP, *Languages with Expressions of Infinite Length*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1964 (Stadies in Logic and Foundations of Mathematics).
6. Jean van HEIJENOORT, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic (1879 – 1931)*, Harvard University Press, 1967.
7. Edited by : Jack J BULLOFF, Thomas C. HOLYOKE, S. W. HAHN, *Gödel Kurt* - *Foundations of Mathematics Symposium Papers Commemorating the Sixtieth Birthday of Kurt Gödel*, New York, Springer – Verlang, 1969.
8. Solomon MARCUS, *Gândirea algoritmică*, Bucureşti, Editura tehnică, 1982.
9. Solomon MARCUS, *Provocarea ştiinţei*, Bucureşti, Editura politică, 1988.
10. W. Daniel HILLIS, *Maşina care gândeşte (cum funcţionează calculatoarele)* – Bucureşti, Editura Humanitas, 2001.

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI, PHILOSOPHIA, XLVI, 1-2, 2001

"CE ESTE ADEVĂRUL?"

NICOLAE BOTH

1. Definiţie sau convenţie

A defini ADEVĂRUL înseamnă a formula o judecată (adevărată!) care să caracterizeze noţiunea de adevăr. Acordul cu formularea de mai sus ne obligă la acceptarea unui prim "paradoxal cerc vicios".

Vehiculata formulă: "concordanţa cu realitatea" ne implică într-o fundătură mai adîncă: "Ce este realitatea?".

Dificultatea problemei au cunoscut-o mari gînditori şi savanţi, precum Newton: "Toată viaţa am fost ca un copil … în timp ce oceanul adevărului se întindea înainte-mi fără ca eu să-l fi cunoscut".

Ieşirea din impas – fie şi provizorie – ne-o oferă CONVENŢIA; fie o convenţie conjuncturală, ocazională, privind adevărul semantic, fie o convenţie formală, în cazul adevărului sintactic.

Se pare, deci, că obiectul logicii nu este ADEVĂRUL ca atare, ci măcinarea, cernerea, rafinarea acestuia. Esenţială acestui demers este CORECTITUDINEA.

2. Tipuri de adevăr

Continuîndu-ne demersul, să pătrundem în probleme de conţinut. În prealabil, vom accepta că orice judecată – adevărată sau falsă – conţine şi un mesaj ce poate fi considerat fie pozitiv (p), fie negativ (n), fie indiferent (i).

Observaţie. Există – desigur – şi alte nuanţe ce pot fi avute în vedere, precum: adevăr impus, adevăr preconizat, adevăr prohibit. Deocamdată ne limităm la cele de mai sus.

În felul acesta apare posibilitatea caracterizării judecăţilor prin intermediul a două variabile şi anume: una bivalentă, x = adevărat – fals (să zicem $x \in V = \{1, 0\}$) şi una trivalentă, y = pozitiv – indiferent – negativ (să zicem $y \in S = \{p, i, n\}$).

Notînd cu P mulţimea propoziţiilor (bivalente) şi utilizînd cele două funcţii de valuare (sugerate mai sus):

$$v: P \to V \text{ şi } s: P \to S,$$

ajungem la o logică hexavalentă, avînd funcţia de valuare

$$v \times s: P \to V \times S,$$

unde $V \times S = \{(x, y) | x \in V, y \in S\}$.

Definirea în detaliu a acestei logici rămîne deschisă.

3. Adevăr şi libertate

Faptul că o primă etapă a cunoaşterii premerge caracterizării, determinării, definirii, ne permite să abordăm cunoaşterea adevărului (chiar şi) fără a poseda o definiţie a acestuia.

Cunoaşterea adevărului este necesară orientării întru existenţă; o cunoaştere selectivă, orientată în sensul ascendent al traiectoriei vieţii şi nicidecum spre exclusiva satisfacere a curiozităţii specific umane. Această a doua cale ascunde la tot pasul curse ale înrobirii. Cunoaşterea veritabilă îşi are sursa şi temeiul în sentenţa celebră: "Veţi cunoaşte adevărul şi adevărul vă va face liberi".

O ilustrare – desigur trunchiată – o dăm mai jos:

Noţiunea de grad de libertate este cunoscută din fizică. Un mobil "forţat" a se deplasa pe o dreaptă (sau curbă) are un singur grad de libertate: înainte-înapoi sau dreapta-stînga sau sus-jos. Am putea vorbi, în acest caz, de o logică bivalentă a deplasării.

S-ar părea că o creştere a gradelor de libertate induce o creştere corespunzătoare a valenţei logice (sau invers?).

Închipuiţi-vă că un mobil "forţat" a se deplasa într-un plan (sau suprafaţă) are două grade de libertate, să zicem: înainte-înapoi şi dreapta-stînga. Situaţia ne-ar sugera o logică tetravalentă. Putem conclude că un mobil avînd n grade de libertate acţionează conform unei logici 2^n-valente. Este doar o supoziţie!

Ieşind din acest cadru sec, ne exprimăm convingerea că unica libertate veritabilă constă în a "respira" ADEVĂRUL… Dar şi reciproca poate subzista: unicul ADEVĂR este acela care ne asigură unica libertate.

4. Moduri de cunoaştere

Simplificînd lucrurile, vom admite că există două moduri esenţiale de cunoaştere a adevărului:

(1) Cunoaşterea senzorială (programată);
(2) Cunoaşterea revelată.

(1) Cunoaşterea senzorială, pe care am numit-o şi programată, o vom numi-o şi exterioară (veţi vedea de ce!).

Este cunoaşterea naturală, raţională, obţinută pe cale informativă, prin instrucţie. Aceasta subînţelege un demers analitic, pornind de la întregul văzut din exterior. Deci, informaţia se prelucrează în interior, pe baza "semnalelor " exterioare.

(2) Cunoaşterea revelată ne este oferită din exterior: nu de la obiect, ci de la autorul obiectului; nu de la creaţie, ci de la Creator! Există numeroase exemple ilustrative din istoria civilizaţiei, din istoria cunoaşterii:

a. Mediumuri profane care dau reţete sau soluţii ingenioase în domenii total străine preocupărilor sau capacităţilor acestora.

b. Calculatori mentali care dau "imediat" rezultatele unor calcule complicate sau soluţiile unor probleme dificile.

Vom ilustra şi aceste noţiuni printr-un

Exemplu. Să ne închipuim un corp în spaţiul tri-dimensional (con, sferă, cilindru…). Proiecţiile acestuia pe un plan (bi-dimensional) pot fi un disc circular. O fiinţă (bi-dimensională) situată în acel plan nu poate face distincţie între corpuri; aceasta percepe doar discul. O eventuală "ieşire" din plan i-ar permite distincţia… Este cunoaşterea exterioară.

Noi acceptăm şi un al doilea mod de distincţie, anume, prin cunoaşterea revelată. O ilustrăm mai jos:

Ataşăm fiecărui punct din plan, $(x, y)\in\mathbf{R}^2$, o pondere $\varphi(x, y)$ (de exemplu, lungimea segmentului de perpendiculară pe plan, avînd piciorul în punctul (x, y)).

Funcţia φ: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, are graficul

$$G\varphi = \{(x, y, \varphi(x,y))\} \subseteq \mathbf{R}^3,$$

ceea ce sugerează o "ieşire" din plan.

Ecuaţia $z = \varphi(x, y)$ defineşte suprafaţa delimitatoare a corpului considerat.

Mai general, o ecuaţie în $\mathbf{R}^3$:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

defineşte o suprafaţă. Dacă aceasta "închide" un spaţiu, mulţimea

$$K = \{(x, y, z)\in\mathbf{R}^3 | f(x, y, z) = 0\}$$

defineşte, de asemenea, un corp. Această definiţie corespunde cunoaşterii senzoriale (exterioare).

Explicitată după z, ecuaţia $f(x, y, z) = 0$ devine

$$z = \varphi(x, y),$$

iar mulţimea $K = \{(x, y, \varphi(x, y)| (x, y)\in\mathbf{R}^2\}$ defineşte acelaşi corp, dar prin "cunoaşterea revelată".

Concret, fiinţa bi-dimensională, avînd "revelată" funcţia φ, realizează natura corpului K prin simpla "plimbare" în planul de proiecţie. Aşa, de exemplu, dacă $\varphi(x, y) = = 0$ pentru punctele exterioare conturului din plan, iar $\varphi(x, y) = k > 0$ pentru cele exterioare, corpul este un cilindru.

5. Limitele cunoaşterii

Considerînd individul cunoscător ca o bilă în spaţiul n-dimensional, spaţiul cunoaşterii este partiţionat în două domenii: unul interior şi altul exterior. Vom admite că a cunoaşte interiorul înseamnă o exteriorizare (cel puţin potenţială) a acestuia; a cunoaşte exteriorul înseamnă o interiorizare a sa. În spaţiul bi-dimensional, procesul cunoaşterii reprezintă o transformare (biunivocă) interior - exterior. Ilustrarea geometrică cea mai adecvată ni se pare a fi transformarea planului prin inversiune, individul cunoscător fiind reprezentat de discul mărginit de cercul de inversiune cu centrul în C şi raza r.

Pe măsură ce obiectul cunoscut (O) se îndepărtează, imaginea (percepţia) sa interioară (O') se apropie de centru. Astfel, imaginea domeniului (exterior) cunoscut reprezintă o coroană circulară, care nu va acoperi niciodată întregul disc! Este o primă chemare la recunoaşterea limitelor cunoaşterii.

O a doua chemare – în acelaşi sens – o constituie încercarea (mai mult sau mai puţin izbutită) de axiomatizare a diverselor domenii ale cunoaşterii (matematică, logică, sociologie…).

Axiomele reprezintă o limită (inferioară?) a procesului cunoaşterii.

Un al treilea indiciu al limitei cunoaşterii îl constituie paradoxurile. Mai precis, paradoxul este un indiciu al limitelor decidabilităţii. Formularea logico-matematică cea mai elocventă a faptului aparţine lui Gödel. În principiu, demersul său include trei etape:

(1) Codificarea numerică a limbajului şi a metalimbajului aritmeticii (inclusiv a demonstrațiilor, ca secvențe de formule). Este vorba de aşa numita "numerație Gödel".
(2) Construirea unei formule aritmetice de două variabile numerice, dintre care cea de-a doua reprezintă numărul Gödel al demonstrației formulei respective. Fie aceasta $\Phi(a, b)$. Acceptînd că numărul Gödel al formulei $\forall b\text{-}\Phi(a, b)$ este p, notăm această din urmă formulă cu $\Phi p(a)$.
(3) Demonstrarea faptului că, în cazul unei teorii aritmetice necontradictorii, formulele $\Phi p(p)$ şi $-\Phi p(p)$ nu sunt demonstrabile.

Observație. Îndrăznim a crede că situațiile paradoxale (precum cea de mai sus) apar datorită asimilării obiectului cu subiectul, a creației cu Creatorul.

BIBLIOGRAFIE

1. Both, N., *Capitole speciale de logică matematică*, Lito, Universitatea "Babeş-Bolyai", Facultatea de Matematică şi Informatică, Cluj-Napoca, 1994.
2. Both, N., *Individ şi personalitate*, în Lucrările Seminarului "Didactica Matematicii", vol. 12, Universitatea "Babeş-Bolyai", Facultatea de Matematică şi Informatică, Cluj-Napoca, 1994, pp. 39-42.
3. Constantin, D., *Inteligența materiei*, Editura Militară, Bucureşti, 1981.
4. Dumitriu, A., *Soluția paradoxelor logico-matematice*, Editura Ştiințifică, Bucureşti, 1966.
5. Froda, Al., *Eroare şi paradox în matematică*, Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1971.
6. Gödel, K., *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*, în "Monatshefe für Mathematik und Physik", 37, 1931.